

结构力学实用教程

主　编　常伏德　王晓天



· 导入案例中引入工程实例，增加学习目的性和趣味性
· 贯穿分析研究力学问题的科学方法及力学原理的应用
· 习题类型多样、数量丰富，兼顾注册结构工程师考试





北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

说　明

本书电子版仅提供给高校任课教师使用，如有任课教师需要全本教材浏览或需要本书课件等相关教学资料，请联系北京大学出版社客服，微信手机同号：15600139606，扫下面二维码可直接联系。

由于教材版权所限，仅限任课教师索取，谢谢！



21世纪全国本科院校土木建筑类创新型应用人才培养规划教材

结构力学实用教程

主　编　常伏德　王晓天
副主编　王树范　刘丽华
主　审　范国庆



内 容 简 介

本书是编者依据多年的教学改革经验编写的，对与力学课程紧密联系的高等数学课程及后续的各门专业课程进行了系统的分析。本书在符号的使用上，尽可能与土木工程专业规范的规定相同；在内容安排上注重了承上启下、理论与实际应用的结合，对繁杂的理论推导进行了简化；强调使用计算机软件对复杂的力学问题进行分析，把烦琐的计算留给计算机；注重手算能力、基本概念的培养；在每章的导入案例中引入了工程实例，在课程内容中讨论了部分工程实例中力学原理的应用，配置了结合注册结构工程师考试的数量较多、题型较丰富的课后习题。

全书分13章，主要内容为绪论、平面体系的几何组成分析、静定梁、静定平面刚架、三铰拱、静定平面桁架和组合结构、结构的位移计算、力法、位移法、多高层结构内力分析的手算实用法、影响线及其应用、结构动力学、结构塑性极限荷载简介。每章均附有各种类型的习题及部分参考答案。

本书可作为高等学校土建、水利等专业的教材，也可作为工程技术人员进行工程计算、参加注册结构工程师考试的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

结构力学实用教程/常伏德，王晓天主编. —北京：北京大学出版社，2012.9
(21世纪全国本科院校土木建筑类创新型应用人才培养规划教材)
ISBN 978-7-301-17488-3

Ⅰ.①结… Ⅱ.①常…②王… Ⅲ.①结构力学—高等学校—教材 Ⅳ.①O342

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第205636号

书　　名：结构力学实用教程
著作责任者：常伏德　王晓天　主编
策 划 编 辑：吴　迪
责 任 编 辑：伍大维
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-17488-3/TU·0272
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路205号　100871
网　　址：http://www.pup.cn　http://www.pup6.cn
电　　话：邮购部62752015　发行部62750672　编辑部62750667　出版部62754962
电 子 邮 箱：pup_6@163.com
印　刷　者：
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787毫米×1092毫米　16开本　24.75印张　584字
2012年9月第1版　2014年4月第2次印刷
定　　价：47.00元

前　　言

本书是依据编者多年的教学改革经验及参照2011年颁布的《高等学校土木工程本科指导性专业规范》编写的。

本书以应用为目的，以科学的认知、学习规律为主干，贯穿了分析研究力学问题的科学方法：增加与减少约束的方法；静力平衡和分配的方法；杆件变形、物理与静力结合的方法。这些方法在教材中多次循序渐进地应用，能提高学习者研究问题和解决实际工程问题的能力。

本书在编写前，对与力学课程紧密联系的高等数学课程及后续的各门专业课程进行了系统的分析。在每章的导入案例中引入了工程实例，在课程内容中讨论了部分工程实例中力学原理的应用，配置了结合注册结构工程师考试的数量较多、题型较丰富的课后习题，这些都会增强学习者对力学学习的目的性和趣味性。

本书由长春工程学院常伏德教授、长春工程学院王晓天副教授担任主编，由长春工程学院王树范讲师、长春工程学院刘丽华教授担任副主编。本书具体编写分工是：第1章、第10章、第13章由常伏德编写；第2章、第3章、第4章、第8章、第11章由王晓天编写；第5章、第6章、第7章、第12章由王树范编写；第9章由刘丽华编写。

本书在编写过程中得到了卢存恕教授、主审范国庆教授的无私帮助，在此表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，书中难免存在不足之处，恳请广大读者批评指正。

编者
2012年4月

目　　录


北京大学出版社版权所有
禁止转载

第1章
绪　　论

本章教学要点

知识模块	掌握程度	知识要点
结构力学基本概念	掌握	结构力学基本概念
	熟悉	结构计算简图选取的基本原则
	熟悉	结构、荷载的分类
	了解	学习方法

本章技能要点

技能要点	掌握程度	应用方向
结构计算简图	熟悉	确定结构受力特点
结构、荷载的分类	熟悉	确定结构计算方法



导入案例

曾被称为“八分之一 engineer”的土木工程师

19 世纪中叶，由于工业的发展，人们开始设计、建造各种金属桁架结构的铁路桥梁等大型的工程结构。对于这些结构的设计，首先要对各个杆件之间的联系进行简化，抽象出来一个可以计算的图形，再进行体系的组成分析、静定结构和超静定结构的内力分析和计算。而那个时期的工程师对单个构件的受力性能(如简支梁等)比较熟悉，而对结构物受力性能的认识还处在一个模糊、探索的阶段，对于如图 1.1 和图 1.2 所示的结构，还没有科学的计算简图及计算方法，还主要依靠材料力学的计算公式和简陋的试验来完成设计。19 世纪末 20 世纪初，钢筋混凝土结构大量应用在土木工程中，许多土木工程师在对图 1.1 中所示连续梁的跨中弯矩进行计算时，还采用了为他们所熟知的简支梁在均布力作用下，跨中弯矩为 $1/8ql^2$ 的结果。由于实际结构的跨中弯矩小于该值，按其数值进行配筋是偏于安全的。他们对于支座处的负弯矩也采取了类似的偏于安全的算法，当年建造的一些房屋有些至今还在使用着。所以，那个时代的一些其他行业的工程师曾称呼土木工程师为“八分之一 engineer”。显然，这些结构耗费了大量的材料，是不经济的设计。并且，一些复杂的结构形式仅用这种简单的计算方式进行计算可能会得出偏于不安全的结果。

在长达 100 多年的时间里，科学家们经过不懈的努力，陆续建立起了结构力学的体系。到了 20 世纪二三十年代，科学家们还陆续创建了一些对超静定结构进行计算的简易方法，使得普通工程师在进行结构设计时，也能很容易地计算出复杂结构的内力。

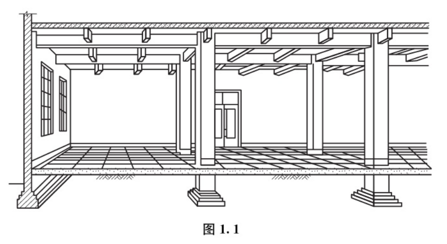


图 1.1

图 1.2

本章将介绍结构的分类、计算简图的选取、结构力学的发展和对结构力学的学习方法等内容。

1.1 结构力学的研究对象和任务

1. 结构及结构的分类

结构是指工程中能承受各种荷载与作用，起骨架作用的体系。例如，在房屋中的由梁和楼板组成的梁板结构体系、由梁与柱组成的框架(刚架)结构体系(图 1.1)以及由屋架与牛腿柱组成的排架结构体系，在铁路和公路上的桁架桥(图 1.2)、拱桥(图 1.3)、悬索桥(图 1.4)等，这些结构都是由梁、墙、板、柱等构件通过结点(相交点)连接而成的。这些

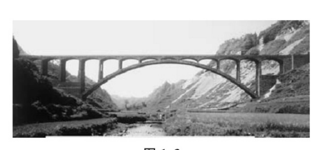


图 1.3



图 1.4

构件在一定条件下都可称为杆件。所谓杆件，就几何尺寸而论，其特点是沿杆长方向的尺寸要远大于其他两个方向的尺寸。由杆件组成的结构，称为杆件结构，如上述的梁、拱、刚架、桁架结构。由厚度比长度和宽度小得多的构件组成的结构称为板壳结构(壁结构)，如楼板和壳体屋盖。由长度、宽度和厚度三个方向的尺度相近的构件组成的结构称为实体结构，如水工结构中的挡水坝。

2. 结构力学的研究对象和任务

结构力学是在理论力学和材料力学的基础之上，对结构的受力进行分析的重要课程。理论力学着重讨论物体机械运动的基本规律，材料力学是以单个杆件为研究对象的，而结构力学是以杆件结构为研究对象的。

为保障结构完成预定的承受各种荷载与作用，起骨架作用的目的，除了要满足各个杆件由材料力学保障的强度、刚度、稳定性外，还要保障结构的刚度和稳定性以及在振动时的安全，而这些都首先要对杆件结构的合理组成形式进行研究。例如，北京某工厂的一幢七层装配式钢筋混凝土框架结构，施工中在完成框架梁、柱吊装后，于1985年3月27日夜在一场大风中整体倒塌。原因在于结构吊装后，大部分梁柱相交结点未按规范要求焊接牢固，而只是点焊，致使结点刚性严重不足。这种状态下组成的结构是属于几何形状上可变动(几何不稳定)的结构，称为几何可变体系。显然，这样的体系即使在只有风力作用下也会失去原有的结构形式。因此研究结构各杆件间如何组成方能成为几何不变体系，是结构力学的首要任务。

1.2 结构的计算简图

由于实际结构的复杂性，完全按照实际结构进行受力分析一般是不可能的，也是不必要的。因此在进行结构力学计算以前必须将实际结构进行简化，略去次要的部分，表现其基本受力特征，用一个简单明了的图形代替实际结构简图，这种图形称为结构的计算简图。

1. 杆件连接的简化

结构中各个杆件相互连接的部分称为结点，按其连接的方式，一般可简化为铰结点、刚结点和组合结点。

(1) 铰结点是指相互连接的杆件在连接处可以绕铰的中心转动但不能相对移动的结点，其特点是在结点处有两个方向互相垂直的约束力，但没有约束力矩。固定铰支座就是一个大地与构件之间的铰结点。

(2) 刚结点是指相互连接的杆件在连接处既不能相对移动也不能相对转动的结点，其特点是在结点处有两个方向互相垂直的约束力，还有一个约束力矩。固定端就是一个大地与构件之间的刚结点。

(3) 组合结点是指相互连接的杆件在连接处既有刚结点又有铰结点的结点，其特点是对各自连接的杆件具有刚结点和铰结点的特征。防止电杆倾斜的斜拉索与电杆连接处，就是一个组合结点。

2. 计算简图的选取

根据结构简图抽象出计算简图，应尽可能符合结构的主要受力特征，但同时又应使计算简化，这是选取结构计算简图的两条基本原则。应用结构计算软件进行力学分析时，计算简图的选取可以再多考虑一些结构受力的次要部分。

结构计算简图的选取一般由两部分内容组成：一个是结构的简化，另一个是荷载的简化。以图 1.5(a)所示的木屋架结构简图为例说明如下：一栋房屋由多榀相互平行且等距的木屋架组成，各榀屋架的受力情况基本相同，因此只取其中一榀研究即可。以屋架各杆的轴线代替各杆件绘于图 1.5(b)中，这是结构简化的第一步。根据木杆件交汇处各杆件间存在相互转动的实际可能性，将所有结点简化为铰结点，这是结构简化的第二步。最后考虑屋架与墙的实际支承方式并有利于简化计算，将支座选取为左边是固定铰支座，右边是单链杆支座(即为滚轴支座)作为第三步。关于荷载问题，就其实际传递而言，屋架应受到由檩条传过来的屋面荷载，但由于檩条并不一定位于屋架的结点处[图 1.5(a)]，因此将形成非结点荷载，这会使计算复杂，为此可将檩条传递过来的非结点荷载分解到结点上形成如图 1.5 (b)所示的结点荷载，这个过程可以说是荷载简化。实际上屋架各结点上的集中荷载值可按各结点所占屋架平面位置的大小平均分配，这样就形成如图 1.5(b)所示的屋架计算简图，该图为平面桁架，所谓桁架，是指所有结点均为铰结点的杆件结构。

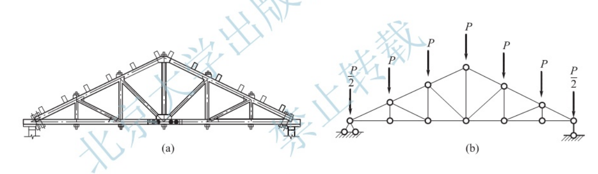


图 1.5

图 1.6 所示为一幢 7 层钢筋混凝土框架结构的计算简图。图中横竖线分别代表各层梁柱杆件，梁柱相交处应视为相互不能发生转动的刚性结点，支座均视为固定端。梁上承受由楼板或次梁传递过来的竖向荷载，框架边柱承受水平风荷载或水平地震作用。这种以刚结点为主的结构通常又称为刚架结构。

图 1.7 所示为一单层单跨厂房的计算简图。图中竖线代表厂房中的变截面柱，横线表示屋架，屋架与柱的结合点近似地看作铰接。竖向荷载除屋面传来的以外还有吊车压力(一般属偏心受压)，水平荷载除风或地震作用外还要考虑吊车的刹车力。这种结构称为排架结构。

图 1.8 为工程中的施工大模板结构简图。它主要由面板、水平加劲肋、竖楞与支撑桁架等组成。两个面板在灌注混凝土时将要受到很大的与板面垂直的荷载作用，为了保证施工质量和节约钢材，必须对面板、水平加劲肋等进行强度与刚度验算，特别是刚度验算将起控制作用。图 1.9(a)为单向面板大模板构造图(结构简图)；图 1.9(b)为面板的计算简图，称为多跨连续梁，它是沿水平方向取 1m 宽面板所构成的，水平肋起到支座作用；

图 1.9(c)为面板与水平加劲肋共同工作的计算简图，称为带伸出端的两跨连续梁，竖楞起到支座作用。

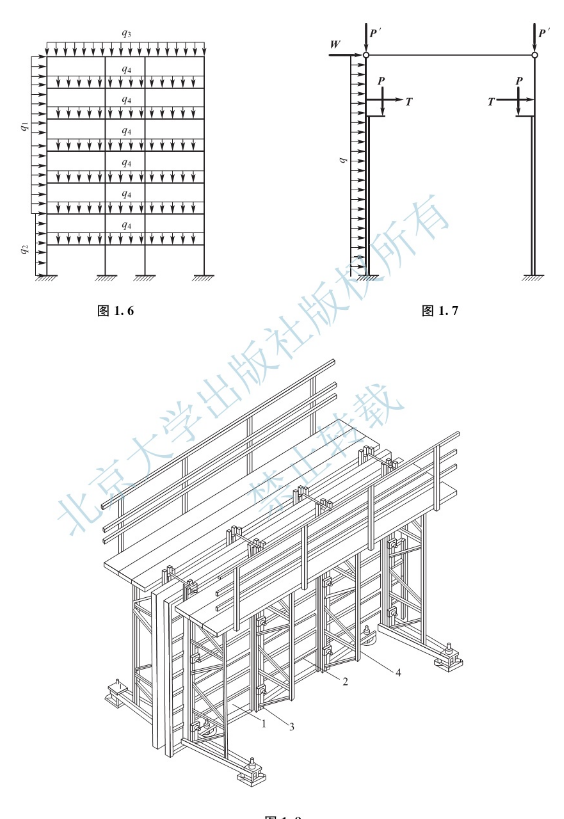


图 1.6

图 1.7

图 1.8

1—面板；2—水平加劲肋；3—竖楞；4—支撑桁架

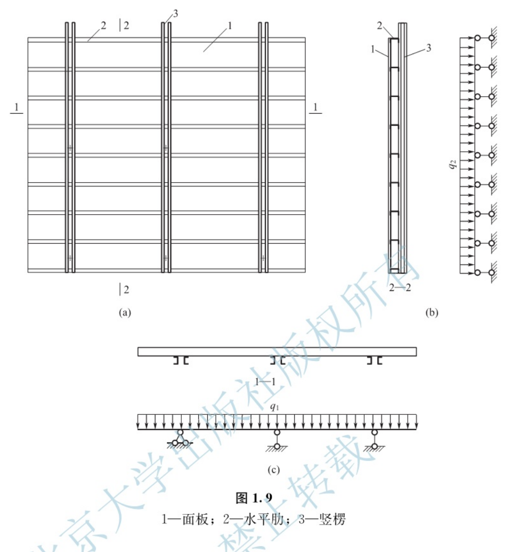


图 1.9

1—面板；2—水平肋；3—竖楞

3. 计算简图的分类

建筑结构与施工过程中常遇到的结构计算简图，按其结构的几何特征与构件连接方式的不同，可以分类如下。

1) 梁式结构

图 1.10 所示为一般常见梁的计算简图。图 1.10(a)称为简支梁(支承最为简单)；图 1.10(b)称为外伸梁；图 1.10(c)称为悬臂梁；图 1.10(d)、(e)称为多跨静定梁；图 1.10(f)、(g)称为连续梁。除最后两种梁为超静定梁外，前面均为静定梁。

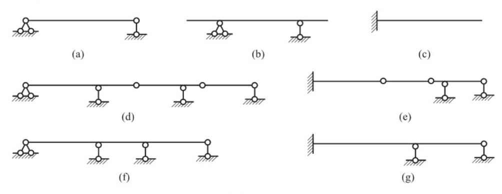


图 1.10

2）拱式结构

图 1.11 为常见的三种拱式结构。图 1.11(a)称为三铰拱(由三个铰组成)；图 1.11(b)称为两铰拱，图 1.11(c)称为无铰拱。除三铰拱为静定结构外，后两种拱为超静定拱。

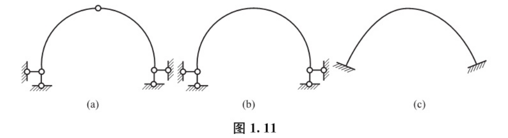


图 1.11

3）桁架

图 1.12 给出了工程结构中最常采用的桁架类型。图 1.12(a)为平行弦桁架；图 1.12(b)为三角形桁架；图 1.12(c)为折弦形桁架；图 1.12(d)为联合桁架；图 1.12(e)为抛物线形桁架；图 1.12(f)为三铰拱式桁架。此处所给桁架均为静定桁架。

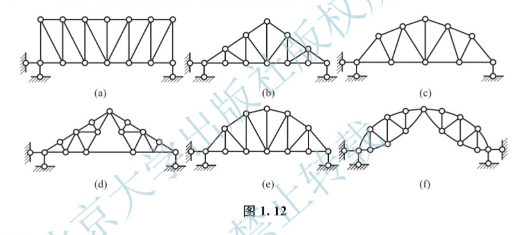


图 1.12

4）刚架

在图 1.13 所示刚架中，图 1.13(a)为悬臂式刚架；图 1.13(b)为简支刚架；图 1.13(c)为三铰刚架；图 1.13(d)为单层多跨刚架；图 1.13(e)为多层多跨刚架。前三种刚架为静定刚架，后两种刚架为超静定刚架。

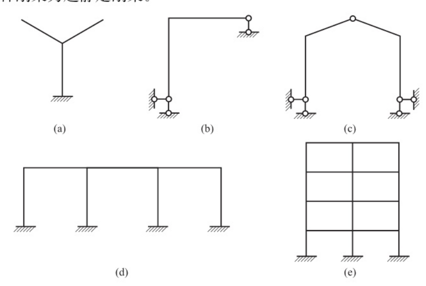


图 1.13

5）排架

图 1.14 为单层工业厂房中最常采用的排架形式，图 1.14(a)为等高多跨排架；图 1.14(b)为不等高多跨排架。两者均为超静定结构。

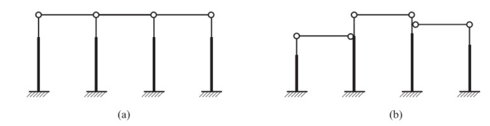


图 1.14

6）组合结构

组合结构是一种梁与桁架、柱与桁架或刚架与桁架组合在一起的结构，如图 1.15 所示。图 1.15(a)为静定结构；图 1.15(b)为超静定结构。

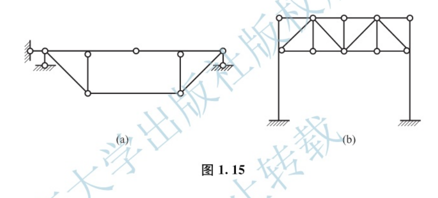


图 1.15

4. 荷载的分类

对结构进行简化时，还需要明确作用在结构上的荷载类型。

(1) 荷载按其作用时间的长短可分为恒载和活载。

① 恒载是指长期作用在结构上的荷载，如结构的自重及设备自重等，其特点是荷载的大小、方向、作用位置不随时间变化。

② 活载是指短时间内作用在结构上的荷载，如楼板上的人群、屋面上的雪等重力。

(2) 荷载按其作用的范围可分为集中荷载和分布荷载。

① 集中荷载是指作用范围相对于总杆件尺寸较小的荷载，如次梁对主梁的作用。

② 分布荷载是指作用在一块面积或一段长度范围上的荷载，如水压力等。

(3) 荷载按其作用的性质可分为静荷载和动荷载。

① 静荷载是指大小、方向和位置不随时间变化或其变化对结构产生惯性力影响可略去的荷载，如结构的自重、楼板上人群重力等。

② 动荷载是指大小、方向和位置随时间变化且其变化对结构产生惯性力影响不可略去的荷载，如地震作用等。

(4) 荷载按其作用位置的变化可分为固定荷载和移动荷载。

① 固定荷载是指作用位置不变的荷载，如结构自重等。

② 移动荷载是指在结构上按一定尺度移动的荷载，如吊车和汽车的轮压。

1.3 结构力学发展简史

人类在古代就开始制造各种器物，如弓箭、农具、房屋等，这些都是简单的结构。近两千年前的东汉时期，文学家王延寿在《鲁灵光殿赋》中描述灵光殿“于是详察其栋宇，观其结构”首次出现了“结构”一词。在以钢、混凝土为主要建筑材料之前，较长的时期里土木工程的结构是以石、木、砖为建筑材料的。西方各国多以石料、混凝土作建筑材料，而东方各国多以砖、木为建筑材料。由于木结构不耐火，也不耐腐蚀，所以，我国留存的古建筑数量很少。随着社会的进步，人们对于结构设计的规律以及结构的强度和刚度逐渐有了认识，并且积累了经验，这表现在古代建筑的辉煌成就中，如埃及的金字塔，中国的万里长城、赵州桥、故宫等。尽管这些结构中隐含有诸多的力学知识，但那时并没有形成一门学科。

结构力学是与近代的理论力学、材料力学同时发展起来的。所以结构力学在发展的初期是与理论力学和材料力学融合在一起的。到 19 世纪初，由于工业的发展，人们开始设计各种大规模的工程结构，从 19 世纪 30 年代起，由于要建造通行火车的铁路桥梁，不仅需要考虑桥梁承受静载荷的问题，还必须考虑承受动载荷的问题，又由于桥梁跨度的增长，出现了金属桁架结构。19 世纪中叶之后，炼钢技术得到普及，于是在结构上普遍采用钢铁结构。1846 年英国在北威尔士建成布瑞塔尼亚铁路大桥，1873 年英国伦敦建成跨泰晤士河的阿尔伯特吊桥，最大跨度 384 英尺(1 英尺＝0.3048 米)。对于这些结构的设计，需要进行较精确的分析和计算。因此，工程结构的分析理论和分析方法开始建立起来。1826 年，法国的纳维尔对于连续梁的理论提出了求解静不定结构问题的一般方法。19 世纪中叶出现了许多结构力学的计算方法和理论，从 1847 年开始的数十年间，学者们应用图解法、解析法等来研究静定桁架结构的受力分析，这奠定了桁架理论的基础。1864 年，英国的麦克斯韦用作图的方式求解桁架的内力，创立单位载荷法和位移互等定理，并用单位载荷法求出桁架的位移。在 1875 年，意大利工程师卡斯蒂利亚诺发表关于单位荷载法的论文。力法是 19 世纪末建立起来的，工程师们终于找到了解超静定结构的方法，结构力学逐渐发展成为一门独立的学科。

基本理论建立后，在解决原有结构问题的同时，还不断发展新型结构及其相应的理论。19 世纪末到 20 世纪初，学者们对船舶结构进行了大量的力学研究，并研究了可动载荷下的梁的动力学理论以及自由振动和受迫振动方面的问题。

20 世纪初，航空工程的发展促进了对薄壁结构和加劲板壳的应力和变形分析，以及对稳定性问题的研究。同时桥梁和建筑开始大量使用钢筋混凝土材料，这就要求科学家们对刚架结构进行系统的研究。1914 年，德国的本迪克森创立了转角位移法，用以解决刚架和连续梁等问题。随后，一些科学家陆续创建了一些对超静定杆系结构的简易计算方法，如 1924 年维列沙金在莫斯科铁路运输学院读书时提出的图乘法、1925 年林同炎提出的力矩分配法，使得普通的设计人员都可以很容易地计算较复杂的超静定杆系结构。

到了 20 世纪 20 年代，人们又提出了蜂窝夹层结构的设想。根据结构的“极限状态”这一概念，科学家得出了弹性地基梁、板及刚架的设计计算新理论。对承受各种动载荷(特别是地震作用)的结构的力学问题，科学家也在实验和理论方面做了许多研究工作。随着结构

力学的发展，疲劳问题、断裂问题和复合材料结构问题先后进入结构力学的研究领域。

20 世纪 50 年代，电子计算机和有限元法的问世使得大型结构的复杂计算成为可能，计算力学作为力学的一个独立的分支学科，从而将结构力学的研究和应用水平提到了一个新的高度。

1.4 结构力学的重要性及学习方法

学习结构力学课程之前，需掌握的专业基础课程有理论力学和材料力学，之后，将学习弹性力学、钢筋混凝土结构、钢结构、建筑抗震等课程。从课程的设置上可以认识到，结构力学课程在土木工程专业中占有重要地位。

另外，从“结构是建筑物和工程设施中承受和传递荷载，起到骨架作用”的描述中可以看出，结构在所有土木工程设施中都是无处不在的。而土木工程中的桥梁、道路、建筑、水力等专业，都是直接构筑在结构力学之上的。

力学是一个完整的知识体系，其基本部分是理论力学、材料力学、结构力学、弹性力学。一般地，学习土木工程专业的人习惯将理论力学、材料力学和结构力学并称为“三大力学”，其中理论力学主要研究物体机械运动的基本规律，材料力学和结构力学主要研究构件及结构的强度、刚度、稳定性和动力反应等问题。其中材料力学是以单个杆件为研究对象的，而结构力学是以杆件结构为主要研究对象的。

结构力学的学习主要体现在对下述四个“能力”的培养和提高上。

1. 分析能力

这种能力包括对实际结构进行分析、简化，确定其计算简图；分析结构的组成规律，确定其是否为静定结构或为超静定结构；结构内力计算方法的选择。分析能力和下面介绍的计算能力是相辅相成的。

2. 计算能力

这种能力包括对各种结构进行计算的能力；对计算结果进行定量校核或定性判断的能力；初步具有应用结构计算程序进行电算的能力。不会计算，也就不会校核；不会手算，则电算也是盲目的。对计算结果进行校核和定性判断，要求能会用另一种计算方法来校核和用简略的方法判定计算结果是否在合理范围之内，这就要计算者掌握结构力学的多种计算方法和近似算法，并能灵活运用。应用计算程序进行电算的能力在今后的工作中十分重要——不会电算就无法计算大型的工程结构问题，也就无法提高计算效率。

做题练习是保证分析能力和计算能力提高的重要环节。不做一定数量的习题，很难对结构力学的基本概念和方法有深入的理解，也很难培养良好的计算能力。

做题练习时要先看书、复习，在理解的基础上做题，通过做题巩固和加深理解。

对习题要反复研究和练习，一道题要尝试用多种方法去求解，这比用一种方法做多道题会更有收获。

对于计算结果不能只对照答案，而不去判断。要养成自行校核的好习惯。在实际工作中，计算人员要对自己算出来的计算结果负责，这是一个优秀工程师所应具有的基本修养。

做错了的题目要及时改正并反思错误的原因，这也是一个非常好的学习机会。

3. 自学能力

自学就是根据已学的知识，主动学习新的知识。要善于总结，就是要把书本上的知识点用自己的话说出来，把繁杂的理论推证用自己的思路整理出来，把各章节的知识融贯成整体。总之，要把所学知识进行总结和提高。在结构力学的学习中，始终贯穿着增减约束、静力平衡、力的分配等研究方法，掌握了这些方法，对新问题的分析就会有正确的思路。

4. 表达能力

作业是工程师书写计算书的基础，因为计算书是要和其他技术人员进行交流和存档的资料，所以要求其形式整洁、步骤分明、思路清晰、图形简明、数据准确、表达简单和科学严谨。这是工程师应具有的一种认真负责的习惯和严谨的工作作风。

本 章 小 结

1. 基本概念

1）结构

构筑物中能够承受荷载而起骨架作用的体系称为结构。结构的类型可分为以下几种。

（1）按照几何特征区分，有杆件结构、薄壳结构和实体结构。

（2）按照空间特征区分，有平面结构和空间结构。

2）构件

组成结构的各个部件。构件的类型：杆件、板和壳、实体。

2. 结构力学的任务

研究杆件结构的合理组成形式；满足各个杆件的强度、刚度、稳定性的要求，保障结构的刚度和稳定性以及结构在振动时的安全。

3. 结构的计算简图

研究了铰结点、刚结点的简化；对计算简图的选取；对计算简图进行了分类，列出了常见的几种结构计算简图。

4. 荷载的分类

荷载：结构上承受的主动力。

荷载分类：按荷载作用的范围可分为分布荷载和集中荷载；按荷载作用时间的长短可分为恒荷载和活荷载；按荷载作用的性质可分为静荷载和动荷载；按荷载作用位置的变化可分为固定荷载和移动荷载。

本章还对结构力学发展史及对结构力学学习方法进行了介绍，有助于加强学习者的工程意识，提高对结构力学的学习兴趣。

关 键 术 语

计算简图(computing model)；结构(structure)；铰(hinge)；铰结点(hinge joint)；刚

结点(rigid joint)；联系(connection)；链杆(bar)；荷载(load)；杆件结构(structure of bar system)；板壳结构(plate and shell structure)；实体结构(massive structure)；梁式结构(beam - type structure)；刚架(frame)；拱(arch)；平面桁架(plane truss)；排架(bent)；组合结构(composite structure)。

习　题　1

一、思考题

1. 结构力学研究的对象是什么?

2. 阐述结构简图和计算简图以及它们与实际结构的关系。

3. 阐述结构计算简图的简化原则、简化内容。

4. 简述常见的杆系结构，并绘图说明。

二、填空题

1. 结构按照几何特征分为__________、__________和__________；按照空间特征分为__________和__________。

2. 结构中常见的杆件有__________、__________和__________。

3. 恒荷载和活荷载是按______________________________来区分的。

三、判断题

1. 板和壳都是厚度很薄的构件，它们是根据其为平面或是曲面来区分的。(　　)

2. 在任何情况下，体内任意两点的距离保持不变的物体叫刚体。(　　)

3. 刚结点的特点是没有相对转角，也没有绝对转角。(　　)

4. 四边支撑的正方形楼板可以简化为一根杆件计算。(　　)

5. 结构的计算简图只考虑荷载的简化。(　　)

6. 荷载是指结构的自重。(　　)

7. 结构力学研究的对象仍然是弹性小变形体。(　　)

四、选择题

1. 结构力学研究的任务是(　　)。

A. 结构中的每一根构件都应有足够的强度

B. 设计时要保证构件的变形数值不超过它正常工作所容许的范围

C. 构件和结构应保持原有的平衡状态

D. 以上三种

2. 荷载按作用范围可分为(　　)。

A. 静荷载和动荷载　　B. 恒荷载和活荷载

C. 分布荷载和集中荷载　　D. 以上都是

3. 作用在楼面上的人群的重力称为(　　)。

A. 恒荷载　　B. 活荷载

C. 静荷载　　D. 动荷载

第2章
平面体系的几何组成分析

本章教学要点

知识模块	掌握程度	知识要点
平面几何体系组成分析	掌握	几何可变和几何不变体系的概念、体系的自由度
	掌握	几何不变体系的组成规则
	掌握	静定结构与超静定结构的几何组成特征
	熟悉	瞬变体系的概念

本章技能要点

技能要点	掌握程度	应用方向
体系自由度的计算	熟悉	结构组成的必要条件、规则的建立
几何组成规则的应用	掌握	判定结构的合理组成和超静定次数


导入案例

被风吹倒了的建筑

1985年3月27日夜晚，北京某工厂的一幢还未完工的七层装配式钢筋混凝土框架结构在一场大风中整体倒塌。经分析，施工中在完成框架梁、柱吊装后，大部分梁柱相交结点未完全焊接牢固，而只是点焊，致使结点刚性严重不足，又没有架设临时支撑。当作用在结构上的外力使得结点焊口开裂，这种状态下组成的体系就是属于如图2.1所示的几何上可变动的体系，显然即使是在不太大的风力的作用下也会失去结构的原有形状。1972年，上海的一幢四层升板结构，也是在施工过程中，柱板相交处仅用木楔临时固定，未能形成刚结点，且又忽视了临时支撑的架设，结果在大约5级的风力作用下整体倒塌。在由构件组装成结构的过程中，构件组成形式的不合理使得整个结构完全失去承载能力，这是现场工程师经常面临的重要问题。因此，研究结构在设计和施工阶段，各杆件间如何连接才能成为几何不变体系，是本章学习的主要内容。

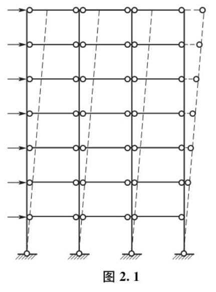


图2.1

2.1 几何组成分析的几个概念

1. 几何不变体系和几何可变体系

杆件结构一般是由若干杆件互相连接所组成的体系。当体系受到任意荷载作用时，若不考虑材料的变形，其几何形状和位置均能保持不变，这样的体系称为几何不变体系，如图 2.2(a)所示。不考虑材料的变形，即使在很小的外力作用下，其几何形状与位置都会发生改变，这样的体系称为几何可变体系，如图 2.2(b)所示。

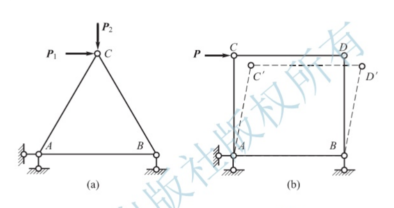


图 2.2

显然，几何可变体系是不能用来作为结构的，因为结构必须是其各部分之间不能发生相对运动的体系，只有这样的体系才可能承受任意荷载并维持平衡。

2. 几何组成分析的目的

分析体系的几何组成，以确定它们属于哪一类体系，称为体系的几何组成分析。几何组成分析的主要目的在于：

(1) 判别某一体系是否几何不变，从而决定它能否作为结构；

(2) 研究几何不变体系的组成规则，以保证所设计的结构能承受荷载而维持平衡；

(3) 正确区分静定结构和超静定结构，为结构的内力计算打下必要的基础。

3. 关于刚片、自由度和约束的概念

1) 刚片

在平面体系中，不考虑材料变形的几何不变部分称为刚片。如一根梁、一根链杆、一个铰结三角形及支承体系的基础都可以看成刚片。

2) 自由度

一个体系的自由度，是指体系在运动时确定其位置所需的独立坐标的数目。例如平面内运动的一个点，其位置需用两个坐标 x、y 来确定［图 2.3(a)］，所以在平面内的一个点有两个自由度。在平面内运动的一个刚片，其位置可由其上任一点 A 的坐标 x、y 和任一直线 AB 的倾角 φ 来确定［图 2.3(b)］，所以在平面内的一个刚片有三个自由度。

3) 约束

约束是指减少或消除体系运动自由度的各种连接装置，也称联系。体系与基础之间的

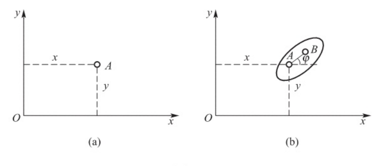


图 2.3

联系，即支座，是体系的外部约束(联系)。体系内部各杆件之间或结点之间的联系，如铰结点、刚结点和链杆等，是体系的内部约束(联系)。能减少一个自由度的装置称为一个约束。以下是几种常见的约束。

(1) 链杆。用一根链杆将刚片与基础相连［图 2.4(a)］，则刚片将不能沿链杆方向移动，因而减少了一个自由度，故一根链杆相当于一个约束。

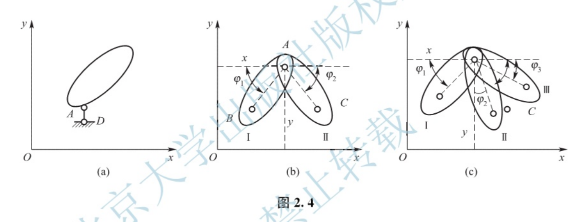


图 2.4

(2) 铰连接。连接两个刚片的铰称为单铰。如图 2.4(b)所示，用一个铰 A 将刚片Ⅰ与刚片Ⅱ相连接，对刚片Ⅰ而言，其位置可由 A 点的坐标 x、y 和 AB 线的倾角 φ_1 来确定，由于点 A 是两刚片的共同点，则刚片Ⅱ的位置只需用倾角 φ_2 就可以确定。两个各自独立的刚片在平面内共有 6 个自由度，它们之间用一个铰连接之后，只剩下 4 个自由度。可见，一个单铰能够减少两个自由度，它相当于两个约束，也相当于两根相交链杆的约束作用。

连接两个以上刚片的铰称为复铰。图 2.4(c)为连接三个刚片的复铰。三个各自独立的刚片在平面内总共有 9 个自由度，它们之间用铰连接之后，体系的自由度变为 5，减少了 4 个自由度，故连接三个刚片的复铰相当于两个单铰的作用。一般说来，连接 n 个刚片的复铰相当于$(n-1)$个单铰的作用。

两根链杆的约束作用也相当于一个单铰。两根链杆杆端直接相连而形成的铰称为实铰，如图 2.5(a)所示。一个刚片用两根不共线的链杆与基础相连接，如图 2.5(b)所示，此时刚片只能绕两链杆的延长线之交点 O 转动。因此，两根链杆的作用相当于在其交点处加一个单铰，这种链杆的延长线交于一点的铰，称为虚铰。当体系运动时，虚铰铰心的位置也随之改变，所以通常又称它为瞬铰。虚铰的作用与单铰一样，仍相当于两个约束。

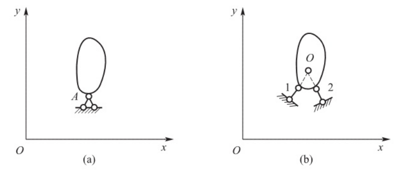


图 2.5

(3) 刚性连接。连接两个刚片的刚性结点称为单刚结点，如图 2.6(a)所示，刚片Ⅰ、Ⅱ原来共有 6 个自由度，用刚结点 C 连接后成为一个刚片，只具有 3 个自由度。所以一个单刚结点可使体系减少 3 个自由度，相当于 3 个约束。刚性连接用于支座时则称其为固定端支座，如图 2.6(b)所示。

连接两个以上刚片的刚性结点称为复刚结点。如图 2.6(c)所示，互不相连的三个刚片，在其平面内，若用刚结点 A 把它们连接，则三者被连成一体而变为一个刚片，其自由度由 9 个被减少为 3 个，即丧失 6 个自由度。该刚结点相当于 2 个单刚结点。由此类推，连接 n 个刚片的复刚结点，就相当于$(n-1)$个单刚结点。

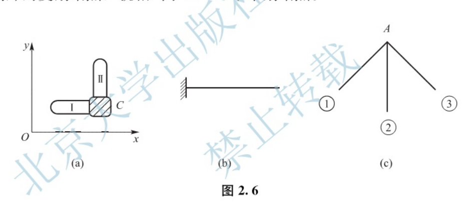


图 2.6

(4) 多余约束。若在体系中增加一个约束，而体系的自由度并不因此而减少，则此约束称为多余约束。例如，平面内的一个自由点 A 有两个自由度，如果用两根不共线的链杆 AB、AC 把 A 点与基础相连［图 2.7(a)］，则点 A 的自由度完全消除而变为零。从固定点 A 的位置来说，AB、AC 两根链杆已足够，且缺一不可，因此它们被称为必要约束。如果再增加一根链杆 AD［图 2.7(b)］，点 A 的实际自由度仍然为零。这就是说，链杆 AD 对于限制点 A 的运动来说是多余的，故称为多余约束。实际上，图 2.7(b)中三根链杆中只有两根链杆是必要约束，任何第三根链杆都可视为多余约束。

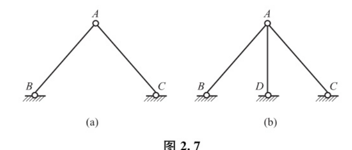


图 2.7

2.2 几何不变体系的基本组成规则

图 2.8(a)所示的结构，是由三根杆件用不在同一直线上的三个单铰两两相连组成的铰结三角形，虽然其位置在平面内是可以改变的(可以整体移动或转动)，但铰结三角形的形状是不能改变的，则该铰结三角形本身是一个没有多余约束的几何不变体系，也称为内部几何不变体系(简称内部不变)。如果将铰结三角形中的三根链杆、或者其中两根、或者其中一根当作刚片，则可衍生出以下三个构成几何不变体系的基本规则。

1. 三刚片规则

将图 2.8(a)中 AB、BC、AC 三根链杆看作三个刚片，铰 A、B、C 为刚片间两两相连的不在同一直线上的三个单铰，这样组成的仍然是铰结三角形［图 2.8(b)］，即是没有多余约束的几何不变体系。由此可得三刚片规则：三个刚片之间用不在同一直线上的三个铰两两相连，则所组成的体系是无多余约束的几何不变体系。

由于连接两刚片的两根链杆的作用相当于一个单铰，故可将任一单铰换为两根链杆所构成的虚铰。据此可知，图 2.8(c)所示体系仍然是无多余约束的几何不变体系。

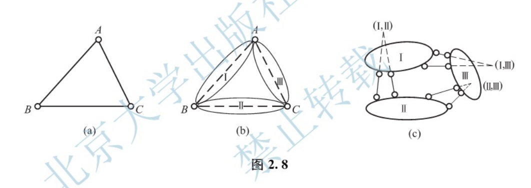


图 2.8

2. 两刚片规则

将图 2.9(a)中 AB、BC 杆看作两个刚片(Ⅰ、Ⅱ)，B 为连接它们的单铰，AC 为连接它们的链杆［图 2.9(a)］，这还是个铰结三角形，即是无多余约束的几何不变体系。由此可得两刚片规则：两个刚片之间用一个单铰和一根链杆连接，且铰和链杆不在同一直线上，则所组成的体系是无多余约束的几何不变体系。

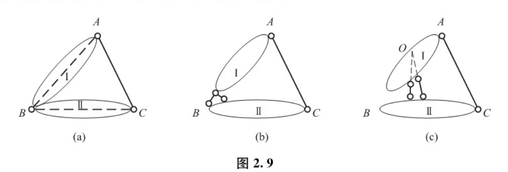


图 2.9

由于一个单铰的作用相当于两根链杆，故可将铰 B 换成两根链杆，如图 2.9(b)、(c)所示，因此，两刚片规则亦可这样叙述：两个刚片之间用不全交于一点也不全平行的三根

链杆相连接，则所组成的体系是无多余约束的几何不变体系。

3. 二元体规则

将点 A 看作是要连接的点，BC 杆视为刚片，AB、AC 杆当作连接结点 A 与刚片的链杆，可得到图 2.10 所示体系。显然，它是无多余约束的几何不变体系。这种由两根不共线的链杆连接一个新结点的装置［图 2.10 中的 BAC］称为二元体。由此可得到二元体规则：在一个刚片上增加一个二元体，仍为无多余约束的几何不变体系。

例如分析图 2.11 所示桁架时，可任选一铰结三角形 ABC 为基础，增加一个二元体得结点 D，从而得到几何不变体系 $ABCD$；再以其为基础，增加一个二元体得结点 F……如此依次增添二元体而最后组成该桁架，故知它是一个无多余约束的几何不变体系。

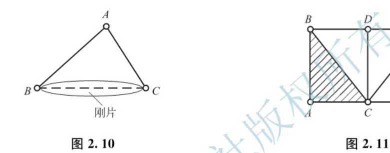


图 2.10　　　　图 2.11

由此可以推出：在一个已知体系上依次增加二元体，不会改变原体系的几何不变性或可变性。即原来的体系是几何不变的，添加二元体后仍然是几何不变的，若原体系是几何可变的，添加二元体后仍然是可变的。同理，在一个已知体系上依次撤除二元体，也不会改变原体系的几何不变性或可变性。

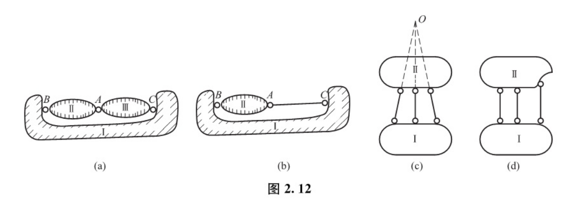
例如分析图 2.11 所示桁架时，从结点 E 开始撤除二元体，然后依次撤除结点 F、D，剩下铰结三角形 ABC，它是无多余约束的几何不变体系，故知原体系为无多余约束的几何不变体系。

2.3 瞬变体系

在研究平面体系的几何组成时应注意，对于构成几何不变体系的三个基本规则都有一些附加的限制条件，如果体系的几何组成不满足这些附加限制条件，其结果将会如何呢？下面来加以研究。

图 2.12(a)所示三刚片用位于同一直线上的三个铰两两相连，此时 A 点位于以 BA 和 CA 为半径的两个圆弧的公切线上，故 A 点可沿此公切线做微小的移动。不过，当发生微小移动后，三个铰就不在同一直线上了，运动也就不再继续。这种原为几何可变，经微小位移后即转化为几何不变的体系，称为瞬变体系。瞬变体系也是一种可变体系。为了区别起见，又可将经微小位移后仍能继续发生刚体运动的几何可变体系称为常变体系。这样，几何可变体系便包括常变体系和瞬变体系两种。

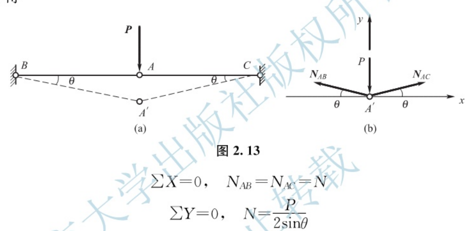
同理，两刚片之间用在同一直线上的一个单铰和一根链杆连接［图 2.12(b)］、两刚片之间用汇交于一个虚铰的三根链杆连接［图 2.12(c)］、两刚片之间用三根互相平行但不等长的链杆连接［图 2.12(d)］，都是瞬变体系。



(a) (b) (c) (d)

图 2.12

瞬变体系只发生微小的相对运动，似乎可以作为结构，但实际上当它受力时可能会出现很大的内力而导致破坏，或者产生过大的变形而影响使用。例如图 2.13(a)所示瞬变体系，在外力 P 作用下，铰 A 向下发生微小的位移而到 A'位置，由图 2.13(b)所示隔离体的平衡条件得



(a) (b)

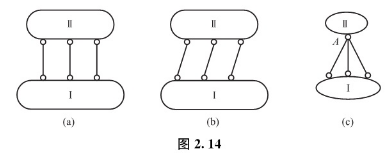
图 2.13

$$\sum X=0,\quad N_{AB}=N_{AC}=N$$

$$\sum Y=0,\quad N=\frac{P}{2\sin\theta}$$

当 A 点的竖向位移很小时，θ 也很小，由上式可知内力 N 是很大的。当 $\theta\to 0$ 时，即使 P 值很小，杆件的内力 $N\to\infty$，这将会造成杆件破坏。因此，瞬变体系是不能作为结构使用的，即使是接近于瞬变的体系也应当避免使用。

图 2.14(a)中，两刚片之间用三根等长平行链杆连接，则微小运动发生后三根链杆仍然相互平行，运动可继续下去［图 2.14(b)］，所以该体系为常变体系。同理，图 2.14(c)中，两刚片之间用汇交于一个实铰的三根链杆连接，该体系也为常变体系。



(a) (b) (c)

图 2.14

2.4 几何组成分析示例

对体系进行几何组成分析时，只要分析出体系的几何组成符合前述三个基本规则中的

任何一个，则体系必定是无多余约束的几何不变体系。

在具体应用这些规则分析时，首先应观察体系与基础的连接，若某体系用不全交于一点也不全平行的三根链杆与基础连接，则可以直接分析该体系内部的几何组成。但体系与基础连接的支座链杆数多于三根时，则通常应把基础看成刚片，再作整体分析。然后判别体系中有无二元体，如有，则应先撤去，以便使体系得到简化。最后恰当选取基础、体系中的杆件或可判别为几何不变的部分作为刚片，应用规则扩大其范围，如能扩大至整个体系，则体系为几可不变的；如果不能的话，则应把体系简化成两至三个刚片，再应用规则进行分析。下面举例加以说明。

【例 2－1】 试对图 2.15 所示体系进行几何组成分析。

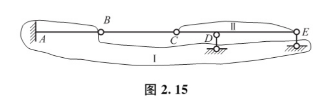


图 2.15

解：由于 A 端为固定端，所以基础与 AB 梁形成一个刚片Ⅰ，将 CE 梁视为一刚片Ⅱ，BC 梁视为链杆，则Ⅰ、Ⅱ两刚片间用不全交于一点也不全平行的三根链杆相连接，则此体系为无多余约束的几何不变体系。

【例 2－2】 试对图 2.16(a)所示体系进行几何组成分析。

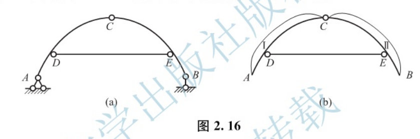


图 2.16

解：体系与基础用不全交于一点也不全平行的三根链杆相连，先撤去支座链杆，只分析体系内部的几何组成［图 2.16(b)］。将曲杆 AC、BC 分别视为刚片Ⅰ与刚片Ⅱ，它们之间用一个实铰与一根链杆连接，且铰和链杆不在同一直线上，则此体系为无多余约束的几何不变体系。

【例 2－3】 试对图 2.17(a)所示体系进行几何组成分析。

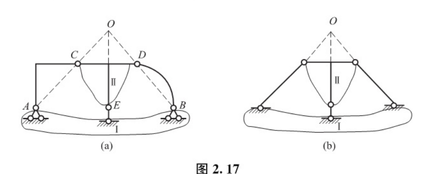


图 2.17

解：该体系与基础相连的支座链杆数多于三根，故把基础视为刚片Ⅰ(两个链杆的作用相当于一个单铰)，CED 视为刚片Ⅱ。折杆 AC 仅两端为铰结，无其他联系，自身又为几何不变体，因此从运动角度考察与一链杆 AC 的作用相当；与此类似，曲杆 DB 也相当于一根链杆。这样此体系将与图 2.17(b)等价。刚片Ⅰ与刚片Ⅱ之间用三根交于一点的虚铰连接，故此体系为瞬变体系。

【例 2－4】 试对图 2.18 所示体系进行几何组成分析。

解：该体系与基础相连的支座链杆数多于三根，故把基础视为刚片Ⅰ，AC、AD 杆分别视为刚片Ⅱ与刚片Ⅲ，CB 与 DB 两折杆看成链杆。Ⅱ、Ⅲ两刚片由实铰 A 相连，Ⅰ、Ⅱ两刚片用虚铰 O_1 相连，Ⅰ、Ⅲ两刚片用虚铰 O_2 相连，由于这三个铰并不共线，故此体系为无多余约束的几何不变体系。

【例 2-5】 试对图 2.19 所示体系进行几何组成分析。

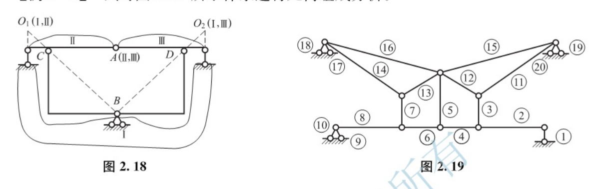


图 2.18　　　　图 2.19

解：方法 1：首先撤去①、②杆所形成的二元体，再相继撤去③、④形成的二元体，同理可撤去⑤、⑥杆，⑦、⑧杆，然后撤去⑪、⑫杆，⑬、⑭杆，⑮、⑯ 杆，⑨、⑩杆，⑰、⑱ 杆，⑲、⑳杆，最后剩下的只有基础这个刚片，故此体系为无多余约束的几何不变体系。

方法 2：将方法 1 的程序逆转过来，从基础这个刚片出发(自身为几何不变体系且无多余约束)增加⑲、⑳两杆组成的二元体，相继增加⑰、⑱、⑨、⑩杆，进一步增加⑮、⑯、⑬、⑭、⑪、⑫杆，然后增加⑦、⑧、⑤、⑥、③、④杆，最后增加①、②杆所形成的二元体，整个体系形成一个大刚片，故此体系为无多余约束的几何不变体系。

注意：减去二元体是体系的拆除过程，应从体系的外边缘开始逐个撤除，而不可从体系中间任意抽取。增加二元体是体系的组装过程，应从一个基本刚片开始。

【例 2-6】 试对图 2.20 所示体系进行几何组成分析。

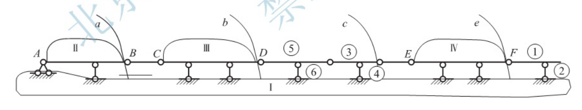


图 2.20

解：先将基础视为刚片Ⅰ，AB 杆视为刚片Ⅱ，则Ⅰ、Ⅱ两刚片间用不全交于一点也不全平行的三根链杆相连接形成一新刚片 a；将 CD 视为刚片Ⅲ，它与刚片 a 之间也是用不全交于一点也不全平行的三根链杆相连接，则又可组成新刚片 b；在刚片 b 的基础上增加⑤、⑥杆形成的二元体，再增加③、④杆形成的二元体，将刚片 b 扩展为刚片 c；将 EF 视为刚片Ⅳ，它与刚片 c 又可组成大刚片 e，最后在大刚片 e 上加①、②杆所形成的二元体，故整个体系为无多余约束的几何不变体系。

【例 2-7】 试对图 2.21 所示体系进行几何组成分析。

解：基础视为刚片Ⅰ，以 DEF 三角形为基础，用增加二元体的方式可逐渐扩大到㉑、㉒，㉓、㉔，㉕、㉖形成刚片Ⅱ；以 ABC 三角形为基础逐渐扩大到④、⑥，⑤、⑦，⑧、⑨，⑩、⑪，⑫、⑬，⑭、⑮，⑯、⑰形成几可不变体系；由于它与基础用不全交于一点也不全平行的三根链杆相连接，故形成扩大了的刚片Ⅲ；刚片Ⅱ与刚片Ⅲ之间用四根不全

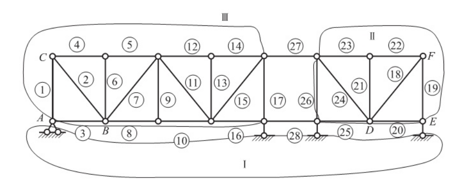


图 2.21

交于一点也不全平行的链杆相连接，故整个体系为有一个多余约束的几何不变体系。

几何组成分析中，某些体系可以选取不同的刚片和联系方式。如图 2.22(a)所示正六边形铰结体系，用三个不平行也不汇交的链杆与大地相连，可以去掉与大地相连的链杆，仅分析体系内部的组成，有如下三种方式进行分析：第一种［图 2.22(b)］，取链杆①、⑨、④为刚片Ⅰ、刚片Ⅱ和刚片Ⅲ，刚片Ⅰ和刚片Ⅱ用链杆⑥、②组成的虚铰 O_1 相连，刚片Ⅱ和刚片Ⅲ用链杆⑤、③组成的虚铰 O_2 相连，而刚片Ⅰ和刚片Ⅲ则用链杆⑦和链杆⑧组成的虚铰 O_3 相连，三个铰心显然在一条直线上，为几何瞬变体系；第二种［图 2.22(c)］，取链杆①、③、⑤为刚片Ⅰ、刚片Ⅱ和刚片Ⅲ，刚片Ⅰ和刚片Ⅱ用平行但不等长的链杆②、⑦组成的虚铰 O_1 相连，刚片Ⅱ和刚片Ⅲ用平行但不等长的链杆④、⑨组成的虚铰 O_2 相连，而刚片Ⅰ和刚片Ⅲ则用平行亦不等长的链杆⑥和链杆⑧组成的虚铰 O_3 相连，三个铰心在无穷远的直线上，亦为几何瞬变体系；第三种［图 2.22(d)］，取链杆⑦、⑧、⑨为刚片Ⅰ、刚片Ⅱ和刚片Ⅲ，刚片Ⅰ和刚片Ⅱ用平行等长的链杆①、④组成的虚铰 O_1 相连，刚片Ⅱ和刚片Ⅲ用平行等长的链杆②、⑤组成的虚铰 O_2 相连，而刚片Ⅰ和刚片Ⅲ则用平行且等长的链杆⑥和链杆③组成的虚铰 O_3 相连，三个铰心在无穷远的直线上，仍为几何瞬变体系。

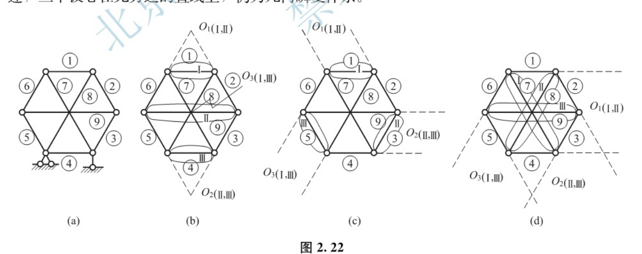


图 2.22

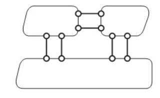


图 2.23

三个刚片用三对平行且等长的链杆相连时，分两种情况：等长链杆在刚片的同一侧相连时为几何常变体系，如图 2.23 所示；不在同一侧时为几何瞬变体系。

总结几何组成分析的过程，始终有增加和减少约束(联系)的思想，这也是在后续的章节里面一直贯穿的内容，因此，注意增

减约束在分析过程中的应用，对结构力学的学习及总结会起到连贯作用。

2.5 平面体系的计算自由度

平面体系可以看成是由多个刚片组合而成。平面体系的计算自由度为各刚片不受约束时的自由度总数与因为约束作用而减少的自由度数之差。计算自由度可按以下两种方法求得。

1. 刚片法

刚片法是以刚片作为组成体系的基本构件来进行计算的，用于平面刚片体系。其计算公式为

$$W=3m-(2h+r) \tag{2-1}$$

式中，W 为平面体系的计算自由度；m 为刚片数；h 为单铰数(若有复铰，须将其折算成单铰的个数再代入公式)；r 为支座链杆数。

2. 铰结点法

铰结点法取铰结点作为体系的基本构件进行计算，用于平面铰结链杆体系。其计算公式为

$$W=2j-(b+r) \tag{2-2}$$

式中，W 为平面体系的计算自由度；J 为结点数；b 为杆件数；r 为支座链杆数。

应注意：计算自由度 W 不一定能够反映体系的实际自由度。这是因为计算自由度公式是通过假设每个约束都使体系减少自由度而导出的。所以，只有当体系上无多余约束时，计算自由度与实际自由度才一致。

【例 2-8】 求图 2.24 所示体系的计算自由度 W。

解：用刚片法计算。

刚片数 $m=5$；单铰数 $h=5$(结点 E 为复铰，相当于两个单铰)；支座链杆数 $r=5$，则

$$W=3m-(2h+r)=3\times5-(2\times5+5)=0$$

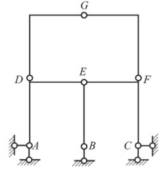


图 2.24

【例 2-9】 求图 2.25 所示体系的计算自由度 W。

解：用铰结点法计算。

结点数 $j=8$；杆件数 $b=14$；支座链杆数 $r=3$，则

$$W=2j-(b+r)=2\times8-(14+3)=-1$$

利用式(2-1)和式(2-2)计算体系的自由度 W，结果为下面三种情形。

(1) 当 $W>0$ 时，表明体系存在自由度，缺乏足够的约束，体系一定是几何可变的。

(2) 当 $W=0$ 时，表明体系具有保证几何不变所需的最少约束。如约束布置得当，则体系为无多余约束的几何不变体系，否则为几何可变体系或几何瞬变体系。

(3) 当 $W<0$ 时，表明体系有多余约束。但有多余约束的体系不一定为几何不变的，

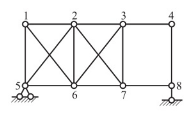


图 2.25

如约束布置不当，仍可为几何可变的。如图 2.25 所示体系，虽然计算自由度 $W=-1$，但由于约束布置不当，仍可为几何可变体系。

由此可见，$W\leqslant 0$ 是保证体系几何不变的必要条件，但不是充分条件。

对于如图 2.13、图 2.17、图 2.22 和图 2.24 所示几何瞬变体系，其自由度 $W=0$。从刚片的组成规则来看，它们也满足了三刚片相连组成无多余约束的几何不变体系所需最少联系的规则，所以说，他们是无多余约束的几何瞬变体系。

从瞬变体系的运动来看，图 2.17、图 2.22 和图 2.24 所示的几何瞬变体，它们具有一个瞬时运动。如图 2.13(a)中的 A 点，AB 杆和 AC 杆同时限制了 A 点的水平运动而没有限制它的垂直运动，而限制 A 点的水平运动仅需一个 AB 杆或 AC 杆即可。那么，另一个杆件即是多余的了，因此，还可以说瞬变体系是至少具有一个多余约束的体系。这种决定体系为瞬变体系的多余约束与不变体系中的多余约束是有所不同的，这方面还有许多需要进一步分析和研究的问题。

还有一些体系是不能用几何组成规则来判定的，如图 2.26 所示的体系。当它们的自由度 $W=0$ 时，可用零载法(参考有关书籍)进行判别。

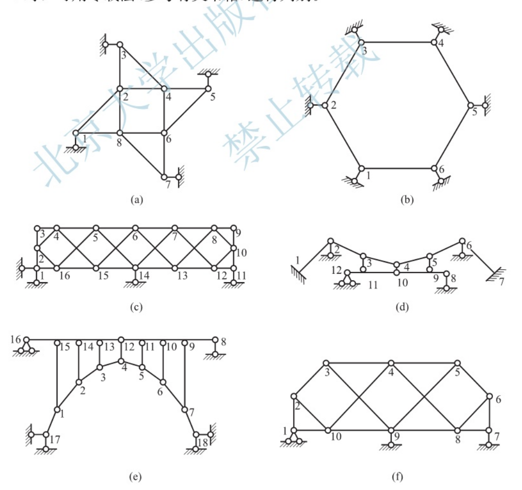


图 2.26

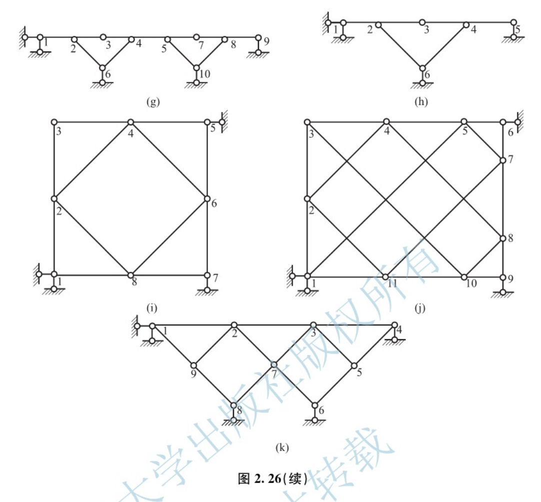


图 2.26(续)

清华大学研制的结构力学求解器可对所有体系进行判别，对于能用几何组成规则判断的体系可给出分析过程，特别是还能对几何瞬变体系和几何可变体系的运动情况进行动画演示。

2.6 体系的几何组成与静定性的关系

在体系的几何组成分析中，除可以判定体系是否几何不变外，还可判定体系是静定结构还是超静定结构。

在静力学中已知，由静力平衡方程即可求出全部反力和内力的结构称为静定结构，用静力平衡方程不能求出全部支座反力和内力的结构称为超静定结构。例如图 2.27(a)所示的简支梁，有三个支座反力，可以由平面一般力系的三个平衡方程$\sum X=0$、$\sum Y=0$、$\sum m_0=0$求出。从而全部内力都能用平衡条件求出，即为静定结构。图 2.27(b)所示连续梁，有四个支座反力，但只能建立三个独立的平衡方程。未知支座反力数大于平衡方程数，不能用三个方程求解四个未知支座反力。因而不能求解全部内力，即为超静定结构。

从几何组成分析上来说，图 2.27(a)所示简支梁为无多余约束的几何不变体系，而图 2.27(b)所示连续梁为有多余约束的几何不变体系。

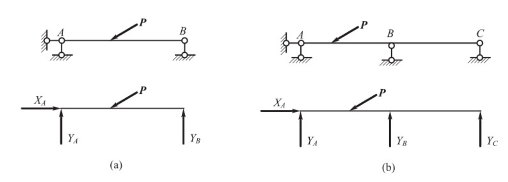


图 2.27

因此，静定结构在几何组成上是无多余约束的几何不变体系，它的力学特点是全部支座反力和内力都可以由平衡条件求得唯一的解答。超静定结构在几何组成上是有多余约束的几何不变体系，它的力学特点是全部支座反力和内力不能由平衡条件求得唯一的解答。

本 章 小 结

本章首先研究了刚体、自由度、约束和多余约束的概念，讲授了限制刚片自由度的约束类型，常见的约束有：链杆、单铰、复铰、虚铰、刚结点等。

然后，根据体系的可变性进行了如下的划分：几何不变体系、几何可变体系。

研究了体系的自由度计算和几何不变体系的三个构成规则，三个规则是本章学习和应用的重点内容。

对平面体系的分类及其几何特征和静力特征的总结见表 2－1。

表 2－1　平面体系的分类及其几何特征和静力特性

<table>
<tr><th colspan="2">体系分类</th><th colspan="2">几何组成特性</th><th colspan="2">静力特性</th></tr>
<tr><td rowspan="2">几何不变体系</td><td>无多余约束的几何不变体系</td><td colspan="2">约束数目够、布置也合理</td><td>静定结构：仅由平衡条件就可求出全部反力和内力</td><td rowspan="2">可作结构使用</td></tr>
<tr><td>有多余约束的几何不变体系</td><td>约束有多余、布置也合理</td><td rowspan="2">有多余约束</td><td>超静定结构：仅由平衡条件不能求出全部反力和内力</td></tr>
<tr><td rowspan="2">几何可变体系</td><td>几何瞬变体系</td><td>约束数目够、布置不合理</td><td>内力为无穷大或不确定</td><td rowspan="2">不能作结构使用</td></tr>
<tr><td>几何常变体系</td><td colspan="2">约束数目不够、或布置不合理</td><td>不存在静力解答</td></tr>
</table>

关 键 术 语

体系(几何)组成分析(geometric stability analysis of system)；刚片(rigid member)；

自由度(freedom)；约束(restraint)；单铰(single hinge)；虚铰(virtual hinge)；多余约束(redundant restraint)；几何不变体系(stable system)；常变体系(constantly unstable system)；瞬变体系(instantaneously unstable system)。

习　题　2

一、思考题

1. 几何可变体系、几何瞬变体系为什么不能作为结构？试举例说明。

2. 何谓单铰、复铰、虚铰？体系中任何两根链杆是否都相当于在其交点处的一个虚铰？

3. 图 2.28 中哪两根链杆能形成虚铰？

4. 图 2.29 中的 1—a—2 部分能否看成是二元体？

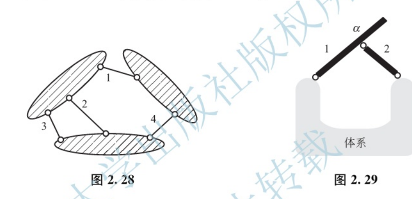


图 2.28　　　　图 2.29

5. 链杆能作为刚片吗？刚片能作为链杆吗？刚片与链杆的主要区别在哪里？

6. 能否通过增加二元体将一可变体系转变为几何不变体系？不断地拆除二元体，能不能将一个几何不变体系拆成几何可变体系？

7. 试述几何不变体系的三个基本组成规则，为什么说它们实质上只是同一个规则？

8. 在进行几何组成分析时，应注意体系的哪些特点，才能使分析得到简化？

9. 计算自由度 W 的概念是什么？它与体系的几何可变(不变)性有什么关系？

10. 图 2.30 中，如果首先把 AC 杆和 BC 杆当作二元体去掉，则剩下的部分为常变体系，故推知原体系也是常变的，这样的分析正确否？为什么？

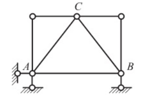


图 2.30

二、填空题

1. 杆件相互连接处的结点通常可以简化成________、________和________。

2. 几何组成分析中，固定平面内一个点，至少需要________个约束。

3. 三个刚片用三个共线的单铰两两相连，则该体系是________。

4. 连接两个刚片的任意两根链杆的延长线交于一点，则该联系称为________。

5. 几何瞬变体系的内力为________或________。

6. 两刚片组成无多余约束的几何不变体系，应至少需要________个联系。

7. 从几何分析的角度讲，静定结构和超静定结构都是________体系，前者是________多余约束，而后者是________多余约束。

8. 根据平面体系自由度计算公式即可判定其体系的是________体系。

9. 几何不变体系的必要条件是计算自由度 W ________，充分条件是满足________规则。

10. 若要使图 2.31 所示平面体系成为几何不变体系，且无多余约束，需添加链杆(包括支座链杆)的最少数目为________个。

11. 图 2.32 所示体系是________体系，它有________个多余约束。

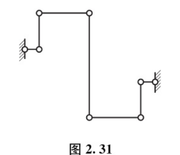


图 2.31

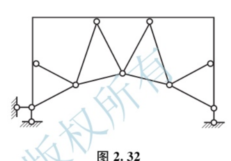


图 2.32

12. 几何不变体系的必要条件是________，充分条件是________。

13. 图 2.33 所示体系是________体系。

14. 图 2.34 所示体系是________体系。

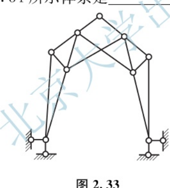


图 2.33

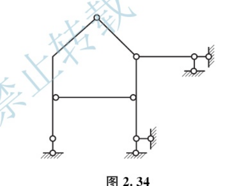


图 2.34

三、判断题

1. 多余约束是结构体系中不需要的约束。(　　)

2. 有多余约束的体系一定是几何不变体系。(　　)

3. 有些体系为几何可变体系，但却有多余的约束存在。(　　)

4. 在任意荷载作用下，无多余约束的几何不变体系可以仅用静力平衡方程即可确定全部支座反力和内力。(　　)

5. 任意两根链杆的约束作用均可相当于一个单铰。(　　)

6. 连接 4 个刚片的复铰相当于 4 个单铰。(　　)

7. 三个刚片由三个单铰或任意六根链杆两两相连，体系必为几何不变体系。(　　)

8. 如果体系的计算自由度小于或等于零，那么体系一定是几何不变体系。(　　)

9. 一个刚片可以是一根杆或者是由几个刚片组成的几何不变体系。(　　)

10. 当一个体系的计算自由度为 0 时，则该体系为几何不变体系。(　　)

11. 几何可变体系在任何荷载作用下都不能平衡。(　　)

12. 三个刚片彼此由三个铰相连的体系一定是静定结构。(　　)

13. 有多余约束的体系一定是超静定结构。(　　)

14. 几何瞬变体系不能用作工程结构。(　　)

15. 几何不变体系的计算自由度一定等于零。(　　)

16. 平面几何不变体系的三个基本组成规则其实质是相同的。(　　)

17. 两刚片或三刚片组成几何不变体系的规则中，不仅指明了必需的约束数目，而且指明了这些约束必须满足的几何条件。(　　)

18. 图 2.35 所示体系中，去掉其中任意两根支座链杆后，余下部分都是几何不变的。(　　)

19. 图 2.36 所示体系中，去掉 AE、CE、DE、BE 四根链杆后，得简支梁 AB，故该体系为具有四个多余约束的几何不变体系。(　　)

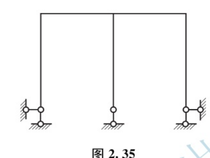


图 2.35

图 2.36

四、选择题

1. 两个刚片用三根链杆连接而成的体系为(　　)。
   A. 几何不变体系
   B. 几何可变体系
   C. 几何瞬变体系
   D. 几何不变体系、几何可变体系或几何瞬变体系

2. 将三个刚片组成无多余约束的几何不变体系，必要的约束数目是(　　)个。
   A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 6

3. 在一个无多余约束的几何不变体系上去除二元体后得到的新体系是(　　)。
   A. 无多余约束的几何不变体系　　B. 几何可变体系
   C. 几何瞬变体系　　D. 有多余约束的几何不变体系

4. 成为结构的体系应该是(　　)。
   A. 几何不变体系　　B. 几何可变体系
   C. 几何瞬变体系　　D. 几何不变体系或几何瞬变体系

5. 某几何不变体系的计算自由度 $W=-3$，则体系的(　　)。
   A. 自由度＝3　　B. 自由度＝0
   C. 多余约束数＝3　　D. 多余约束数＞3

6. 图 2.37 中(　　)体系中的 1 点是二元体。
   A. (a)(c)(d)　　B. (a)(b)(c)(d)
   C. (a)(b)(e)　　D. 全是

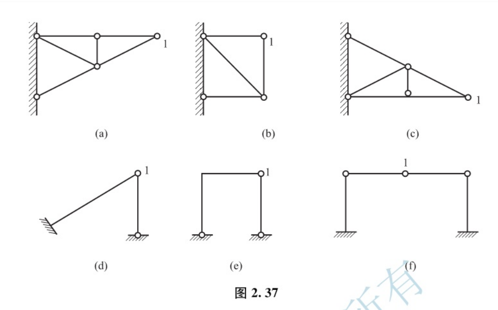


图 2.37

7. 图 2.38 所示体系应是(　　)。

A. 无多余约束的几何不变体系　　B. 有多余约束的几何不变体系

C. 几何瞬变体系　　D. 几何可变体系

8. 图 2.39 所示体系应是(　　)。

A. 无多余约束的几何不变体系　　B. 有多余约束的几何不变体系

C. 几何瞬变体系　　D. 几何可变体系

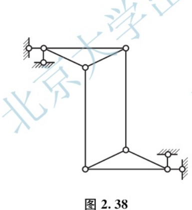


图 2.38

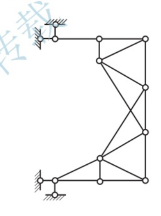


图 2.39

9. 图 2.40 所示平面体系的几何组成性质是(　　)。

A. 几何不变且无多余联系　　B. 几何不变且有多余联系

C. 几何可变　　D. 瞬变

10. 图 2.41 所示平面体系的几何组成性质是(　　)。

A. 几何不变且无多余联系　　B. 几何不变且有多余联系

C. 几何可变　　D. 瞬变

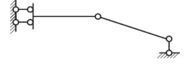


图 2.40

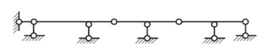
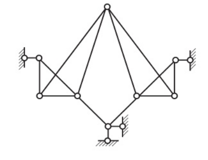
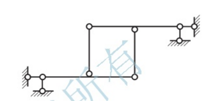


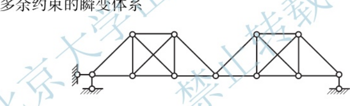
图 2.41

11. 图 2.42 所示体系是(　　)。
A. 无多余联系的几何不变体系　　B. 几何瞬变体系
C. 有多余联系的几何不变体系　　D. 有多余联系的几何不变体系
12. 图 2.43 所示体系是(　　)。
A. 几何不变体系　　B. 几何可变体系
C. 无多余联系的几何不变体系　　D. 瞬变体系


图 2.42


图 2.43

13. 图 2.44 所示，该体系为(　　)。
A. 没有多余约束的几何不变体系
B. 有多余约束的几何不变体系
C. 有多余约束的几何常变体系
D. 有多余约束的瞬变体系


图 2.44

14. 图 2.45 所示的平面体系，几何组成为(　　)。
A. 几何不变无多余约束　　B. 几何不变有多余约束
C. 几何常变　　D. 几何瞬变
15. 图 2.46 所示，体系的几何组成为(　　)。
A. 几何不变且无多余约束　　B. 几何不变有一个多余约束
C. 常变体系　　D. 瞬变体系

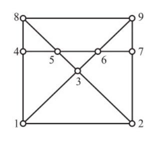


图 2.45

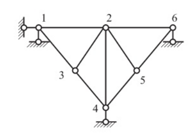


图 2.46

16. 图 2.47 所示，该体系为(　　)。

A. 有多余约束的几何不变体系　　B. 无多余约束的几何不变体系

C. 常变体系　　D. 瞬变体系

17. 图 2.48 所示的体系，几何组成为(　　)。

A. 常变体系　　B. 瞬变体系

C. 无多余约束的几何不变体系　　D. 有多余约束的几何不变体系

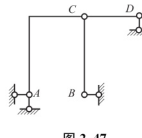


图 2.47

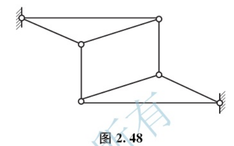


图 2.48

五、分析题

试对图 2.49～图 2.72 所示体系作几何组成分析。如果是具有多余约束的几何不变体系，则须指出其多余约束的数目。

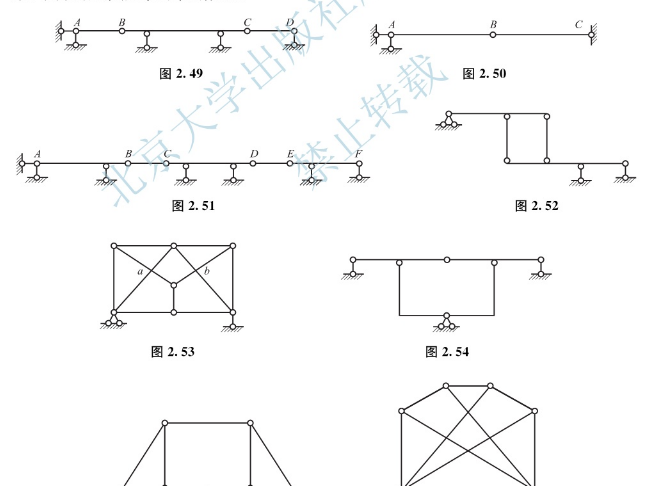


图 2.49　图 2.50

图 2.51　图 2.52

图 2.53　图 2.54

图 2.55　图 2.56

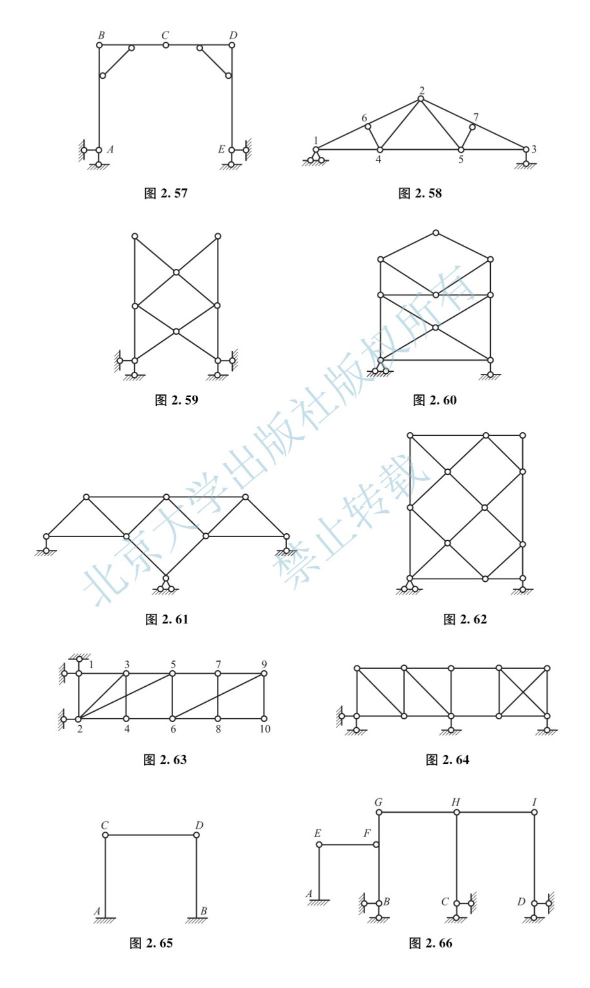


图 2.57

图 2.58

图 2.59

图 2.60

图 2.61

图 2.62

图 2.63

图 2.64

图 2.65

图 2.66

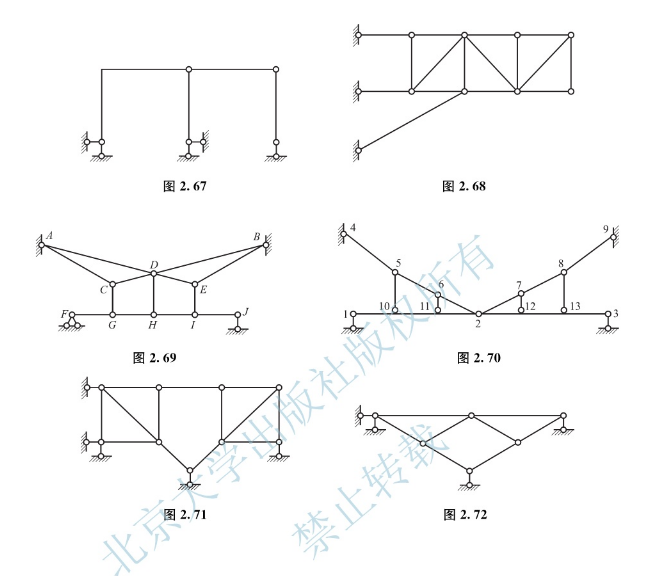


图 2. 67

图 2. 68

图 2. 69

图 2. 70

图 2. 71

图 2. 72

第3章 静 定 梁

本章教学要点

知识模块	掌握程度	知识要点
静定梁	掌握	单跨静定梁的内力计算及内力图
	掌握	多跨静定梁的组成特点及层次图
	掌握	多跨静定梁的内力分析及内力图

本章技能要点

技能要点	掌握程度	应用方向
单跨静定梁的内力计算及内力图	掌握	多跨梁和刚架分析的基础，强度计算，超静定计算
多跨静定梁的内力分析及内力图	掌握	影响线分析，可解决实际工程中多跨静定梁的结构设计



闽中桥梁甲天下

桥梁是人类很早以前就开始进行的一种以交通功能为主的土木工程建设，在我国又以福建省保存较好的古桥梁居多。

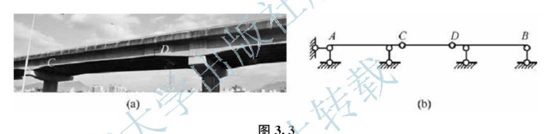
著名桥梁专家茅以升说："凡是到过福建的人，都会感到'闽中桥梁甲天下'之说，确非过誉。泉州洛阳桥、漳州江东桥等等甲天下的闽中桥梁，都是福建人民的光荣，中国人民的骄傲。"图3.1所示为福建泉州东北洛阳江上的泉州洛阳桥，始建于宋皇祐五年(公元1053年)，洛阳桥原长1200m，宽约5m，有桥墩46座，全部用巨大石块干砌而成。铺设在洛阳桥上的都是10多米长、又厚又大的石板。该桥最伟大之处是桥基采用了迄今为止全世界绝无仅有的生物加固的方法，历经900多年至今不垮、不散。图3.2所示为福建的永春东关桥，始建于南宋绍兴十五年(公元1145年)，也是一座梁式大桥。大桥长85m，宽5m，五孔桥墩为块石干砌而成，墩上砌三层巨石，上承桥梁，每孔桥由长16～18m的22根杉木为梁，分两层铺架。梁的上部架设有26间木架砖墙、青瓦屋顶的桥屋，是一座过桥的人员可以在桥屋里通行的"廊桥"。图3.3(a)所示为一现代钢筋混凝土大桥，图中CD部分是搭接在两边的主梁上，图3.3(b)为该桥的计算简图。显然，这是一个无多余联系的几何不变体系，为多跨静定梁结构。



图 3.1



图 3.2



(a)　　(b)

图 3.3

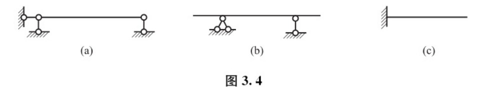
桥梁的形式多种多样，本章主要对上述的静定梁式桥梁结构以及其他梁式结构进行力学分析。

3.1 单跨静定梁

单跨静定梁是工程中常见的一种结构，其内力分析已在工程力学(材料力学)课程中详加论述。但是，由于它的分析也是各种杆系结构内力分析的基础，因此，在这里作一简略回顾和补充。

1. 支座反力的计算

单跨静定梁有简支梁［图 3.4(a)］、伸臂梁(外伸梁)［图 3.4(b)］和悬臂梁［图 3.4(c)］三种形式，它们都是由梁和基础按两刚片规则组成的静定结构，因而其支座反力都只有三个，其值可取全梁为隔离体，由平面一般力系的三个平衡方程求出。



(a)　　(b)　　(c)

图 3.4

2. 截面内力的计算

如图 3.5 所示，梁的任一截面上一般有三个内力分量，即轴力 N、剪力 V 和弯矩 M。它们的正负号规定为：轴力以拉力为正，压力为负；剪力对所研究的部分顺时针转动为正，反之为负；弯矩使梁下部纤维受拉为正，反之为负。

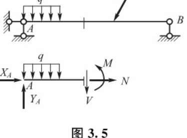


图 3.5

计算梁的内力的基本方法是截面法，即用一个假想截面沿所求内力截面切开，取截面任一侧的部分为隔离体，利用平面一般力系的三个平衡方程即可求出三个内力分量。

由截面法可得到内力的计算法则如下。

(1) 轴力等于截面一侧所有外力(包括荷载和反力)沿截面法线方向投影的代数和。外力沿截面法线方向的分量背离截面引起的轴力为正，指向截面引起的轴力为负。

(2) 剪力等于截面一侧所有外力沿截面方向投影的代数和。外力对所研究截面产生顺时针转动为正剪力，反之为负。

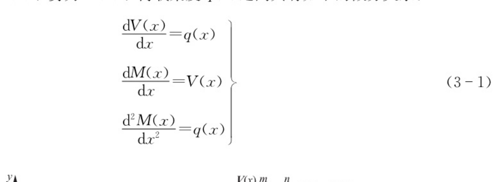
(3) 弯矩等于截面一侧所有外力对截面形心力矩的代数和。外力使梁产生下部受拉的变形为正弯矩，反之为负。

由以上所述内力分量计算法则，可较方便地求出杆件结构指定截面上的内力。

3. 内力与外力间的微分关系及内力图形状判断

在工程力学(材料力学)课程中，已讨论过水平直杆的弯矩、剪力、分布荷载之间的微分关系，在结构力学课程的学习中，要求进一步熟练掌握这些微分关系，并能根据内力图形状的特点迅速绘制内力图。

由工程力学(材料力学)已知，若 x 轴以向右为正，y 轴以向上为正，$q(x)$以向上为正(图 3.6)，则弯矩 $M(x)$、剪力 $V(x)$、荷载集度 $q(x)$之间具有如下的微分关系：



$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}&=q(x)\\ \frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x}&=V(x)\\ \frac{\mathrm{d}^2M(x)}{\mathrm{d}x^2}&=q(x)\end{aligned}\right\}\qquad(3-1)$$

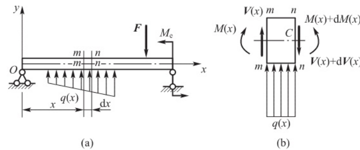


图 3.6

由式(3-1)可以推知荷载与内力图形状之间的对应关系(表3-1)，掌握内力图形状特征，对于正确和迅速地绘制内力图有很大帮助。

表3-1　直梁内力图的形状特征

梁上情况 \ 内力图	无外力区段	均布力 q 作用区段		集中力 P 作用处		集中力矩 M 作用处	铰处
剪力图	水平线	斜直线	力零处	有突变(突变值$=P$)	如变号	无变化	
弯矩图	一般为斜直线	抛物线(凸出方向同 q 指向)	有极值	有尖角(尖角指向同 P 指向)	有极值	有突变(突变值为 M)	为零

【例3-1】 试作图3.7(a)所示简支梁的内力图。

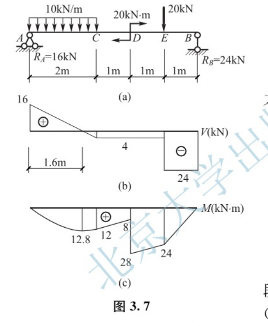


图3.7

解：(1) 求支座反力。

由 $\sum m_B=0$，得 $R_A=16\text{kN}(\uparrow)$

由 $\sum m_A=0$，得 $R_B=24\text{kN}(\uparrow)$

(2) 作V图。由内力计算法则求控制截面剪力值：

$$V_A=R_A=16\text{kN}$$

$$V_C=16-10\times2=-4\text{kN}$$

$$V_{E_左}=V_C=-4\text{kN}$$

$$V_{E_右}=-R_B=-24\text{kN}$$

$$V_B=-R_B=-24\text{kN}$$

AC 段内有均布荷载，V 图为斜直线；CE、EB 段内无均布荷载，V 图为水平线。剪力图如图3.7(b)所示。

(3) 作 M 图。由内力计算法则求控制截面弯矩值：

$$M_A=0$$

为了求出弯矩极值，应确定剪力为零的截面的位置：$V(x)=16-10x=0$

$$x=1.6\text{m}$$

$$M_{极值}=16\times1.6-10\times1.6\times1.6/2=12.8\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_C=16\times2-10\times2\times1=12\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{D_左}=16\times3-10\times2\times2=8\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{D_右}=8+20=28\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_E=2\times14=24\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_B=0$$

AC 段内有均布荷载，M 图为抛物线，其凸向同 q 指向；CD、DE、EB 段内无均布荷载，M 图为斜直线。弯矩图如图3.7(c)所示。

由此可知画内力图的一般步骤。

（1）求支座反力。

（2）分段。分段的原则是每段梁上的荷载必须是连续的，因此外力不连续点均为分段点，即集中力作用点、集中力偶作用点、分布荷载的起点和终点等都是分段点。

（3）计算控制截面上的内力值。根据各段梁的内力图形状，选定所需控制截面，求出这些截面的内力值，并在内力图的基线上用竖标绘出。这样，就定出了内力图上的各控制点。

（4）连线。根据各段梁的内力图形状，将其控制点以直线或曲线相连。

4. 叠加法作弯矩图

力学分析中的叠加原理是指结构中所有荷载产生的效果等于每一荷载单独作用时产生的效果的代数和。现利用叠加原理来绘制弯矩图。

1）用叠加法作简支梁的弯矩图

图 3.8(a)所示为一承受集中力偶 M_A、M_B 和均布荷载 q 作用的简支梁，现根据叠加原理作弯矩图。

首先将梁 AB 所受荷载分成两组：一组是梁两端的集中力偶 M_A、M_B，如图 3.8(b)所示；另一组是梁上的均布荷载 q，如图 3.8(c)所示；然后，分别绘制简支梁在 M_A、M_B 作用下的 M 图［图 3.8(b)］和简支梁在 q 作用下的 M 图［图 3.8(c)］；最后将同一截面的纵标叠加即得简支梁 AB 在外力偶 M_A、M_B 和均布荷载 q 共同作用下的弯矩图［图 3.8(d)］，这种利用叠加原理作弯矩法的方法称为叠加法。

应当注意：弯矩图的叠加是指弯矩纵标的叠加，而不是指图形的简单拼合。

2）分段叠加法作弯矩图

利用叠加法可画出整根梁的弯矩图，如果要画某一段梁 AB［图 3.9(a)］的弯矩图，也可以用叠加法作梁段 AB 的弯矩图。

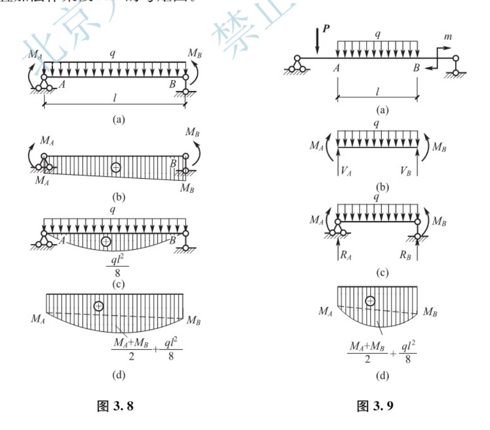


图 3.8　　图 3.9

取 AB 段为研究对象，AB 段除受均布荷载的作用外，在 A、B 两截面上分别还应有相应的弯矩 M_A、M_B 和剪力 V_A、V_B [图 3.9(b)]，利用叠加法画简支梁弯矩图的方法，如果图 3.9(b)能转换成图 3.9(c)，则 AB 段的弯矩图可用叠加法得到。现在分析图 3.9(b)和图 3.9(c)是否等价。

梁段 AB 的长度和简支梁 AB 的跨度相等，杆端力偶 M_A、M_B 和均布荷载 q 都相同。将图 3.9(c)约束解除，用约束反力 R_A、R_B 代替，从平衡条件出发，则 R_A 等于 V_A，R_B 将等于 V_B。对比图 3.9(b)和图 3.9(c)，可发现两者受力情况完全相同，因此图 3.9(b)与图 3.9(c)应具有完全相同的弯矩图。这样，就可以利用绘制简支梁 AB 弯矩图的方法来绘制梁段 AB 的弯矩图。先将 A、B 两端弯矩求出，用虚线连接，然后叠加相应简支梁仅受荷载 q 作用的弯矩图，最终得到 AB 段的弯矩图 [图 3.9(d)]，这种画弯矩图的方法称为分段叠加法。

分段叠加法作梁的弯矩图的步骤如下。

(1) 将直梁划分为若干段。

(2) 计算各段梁两端截面的弯矩。

(3) 根据各段梁两端截面的弯矩(直线相连)作弯矩图。

(4) 将各段梁当作简支梁，根据其上的荷载作弯矩图。

(5) 将(3)、(4)两步的弯矩图相叠加。

采用分段叠加法作弯矩图，梁的分段点不一定取集中力作用点及分布荷载的起点和终点，只要梁段上的外力引起的弯矩图易作，梁段两端截面的弯矩易求，怎样分段都可以。

【例 3-2】 作图 3.10(a)所示伸臂梁的弯矩图。

解：(1) 求支座反力。由 $\sum m_B=0$，得

$$-R_A\times8-80+160\times6+40\times6\times1-40\times2=0$$

$$R_A=130\text{kN}(\uparrow)$$

由 $\sum m_A=0$，得

$$R_B\times8-80-160\times2-40\times6\times7-40\times10=0$$

$$R_B=310\text{kN}(\uparrow)$$

(2) 用分段叠加法作 M 图。控制截面 A、D、E、B、F 将梁分为四段，求控制截面的弯矩：

$$M_A=0$$

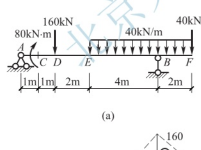
$$M_D=130\times2+80=340\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_E=130\times4+80-160\times2=280\text{kN}\cdot\text{m}$$

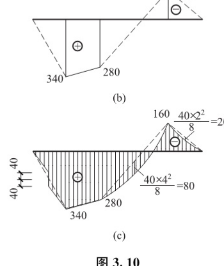
$$M_B=-40\times2-40\times2\times1=-160\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_F=0$$

将控制弯矩绘于图 3.10(b)中，凡两点间尚有荷载者分别连虚直线，无荷载者连实直线。连虚直线的各段分别以虚线为基线叠加由荷载引起的相应简支梁的弯矩，这样的梁段有 AD、EB、BF 三段，叠加时消去正负重叠部分，最后得到带阴影线的弯矩图，如图 3.10(c)所示。



(a)



(c)

图 3.10

5. 简支斜梁的计算

图 3.11(a)所示为钢筋混凝土楼梯斜梁，两端支承在梁上。斜梁的倾角为 α，水平跨度为 l，斜梁所受的荷载分两种：一是沿水平方向均布的竖向荷载，如楼梯上的人群；二是沿楼梯斜梁轴线均布的竖向荷载，如楼梯的自重。斜梁的计算简图如图 3.11(b)所示。

计算时为统一，通常将沿楼梯轴线方向均布的楼梯的自重荷载 q_2 换算成沿水平方向均布的荷载 q_0，如图 3.11(c)所示。换算时可以根据在同一微段上合力相等的原则进行。即

$$q_0 \cdot dx = q_2 \cdot ds$$

$$q_0 = \frac{q_2 \cdot ds}{dx} = \frac{q_2}{dx}\frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{q_2}{\cos\alpha}$$

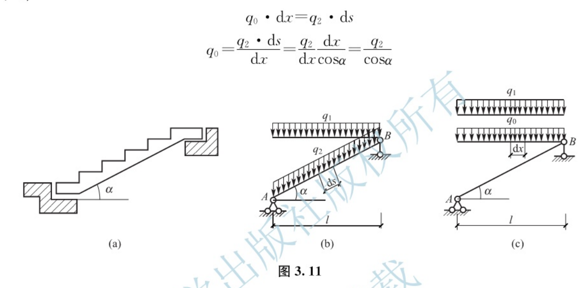


图 3.11

此外，在进行斜梁内力分析时还应注意到，由于斜梁的轴线与水平方向有一定的夹角，其截面上的剪力和轴力的方向与水平线也是倾斜的，需要计算竖向荷载和竖向反力的投影。这也是斜梁与直梁在内力分析上的不同之处。

【例 3-3】 作图 3.12(a)所示简支斜梁的内力图。

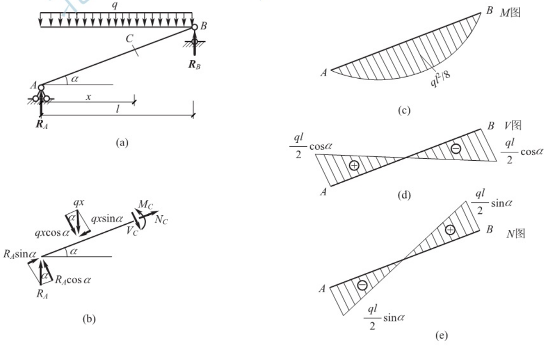


图 3.12

解：(1) 求支座反力。

$$R_A=R_B=\frac{1}{2}ql(\uparrow)$$

(2) 计算任一截面 C 的内力。将反力 R_A 和 AC 段的竖向荷载的合力 qx 分别分解为垂直于斜梁轴线的和平行于斜梁轴线的分力［图 3.12(b)］，则

$$M_C=\frac{1}{2}qlx-\frac{1}{2}qx^2$$

$$V_C=\frac{1}{2}ql\cos\alpha-qx\cos\alpha$$

$$N_C=-\frac{1}{2}ql\sin\alpha+qx\sin\alpha$$

(3) 作内力图。根据上面三个方程分别作出内力图，M 图、V 图、N 图分别如图 3.12(c)、(d)、(e)所示。

读者还可自行讨论当 B 支座方位变化时对内力图的影响。

3.2 多跨静定梁

1. 多跨静定梁的概念

多跨静定梁是由若干根梁用铰相连，并用若干支座与基础相连而组成的静定结构。

多跨梁在公路桥梁［图 3.13(a)］和房屋檩条［图 3.14(a)］中经常遇到，相应的计算简图如图 3.13(b)和图 3.14(b)、(c)所示。

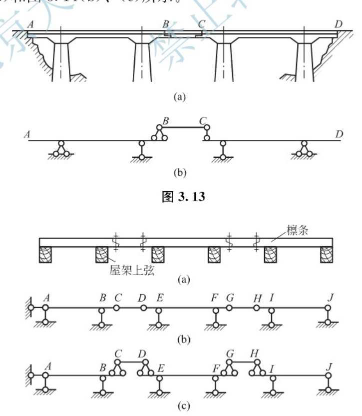


图 3.13

图 3.14

2. 多跨静定梁的基本形式

多跨静定梁通常有两种基本形式。一种基本形式如图 3.15(a)所示，其构造特点是除一跨无铰外，其余各跨均有一铰。另一种如图 3.15(c)所示，其构造特点是无铰跨与二铰跨交互排列。

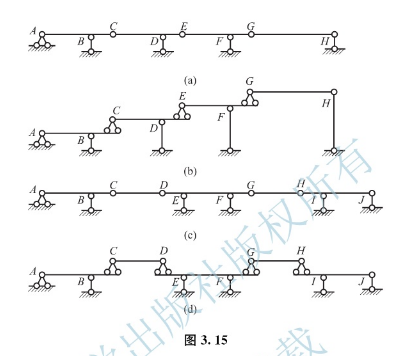


图 3.15

3. 多跨静定梁的计算方法

前面已经学过单跨静定梁内力的计算方法，如果能够把多跨静定梁划分成前面已学过的单跨静定梁，那么就能计算多跨静定梁的内力了。

1）划分多跨静定梁的步骤

(1) 分清基本部分和附属部分。能独立承受荷载并维持平衡的部分称为基本部分；依靠基本部分的支承才能承受荷载并保持平衡的部分称为附属部分。由此可知，多跨静定梁可以在铰处分解为以单跨梁为单元的基本部分和附属部分。图 3.15(a)中的 AC 部分为基本部分，其余部分为附属部分；图 3.15(c)中的 AC、DG、HJ 部分为基本部分，CD、GH 部分为附属部分。

(2) 分清基本部分和附属部分的传荷关系。基本部分受力不影响附属部分，附属部分的受力要传给基本部分。

(3) 画层次图。根据基本部分和附属部分的传荷关系，把基本部分画在下层，而附属部分画在上层，荷载只能由上往下传，而不能由下往上传。这种表示传力层次关系的图形称为层次图。图 3.15(a)所示结构的层次图如图 3.15(b)所示，图 3.15(c)所示结构的层次图如图 3.15(d)所示。

2）多跨静定梁的计算

通过画层次图，多跨静定梁可划分成若干个单跨梁，计算时从附属的最高层算起，逐层向下计算，附属部分的支座反力的反作用力就是基本部分的荷载；然后画出各单跨静定梁的内力图并将其连在一起，即为多跨静定梁的内力图。

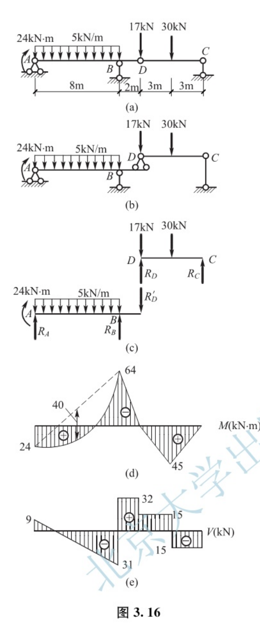


图 3.16

【例 3-4】 作图 3.16(a)所示多跨静定梁的内力图。

解：(1) 画出层次图。梁 ABD 固定在基础上，是基本部分；梁 DC 固定在梁 ABD 上是附属部分。故此，多跨静定梁的层次图如图 3.16(b)所示。

(2) 求支座反力。从层次图中可以看出，整个多跨静定梁由两个层次构成。在计算时先算 DC 梁，再算 AD 梁。

取 DC 梁为隔离体，受力图如图 3.16(c)所示。

由$\sum m_D=0$，得 $R_C=15\text{kN}$ (↑)

由$\sum m_C=0$，得 $R_D=32\text{kN}$

取 AD 梁为隔离体，受力图如图 3.16(c)所示。

由$\sum m_B=0$，得 $R_A=9\text{kN}$ (↑)

由$\sum m_A=0$，得 $R_B=63\text{kN}$ (↑)

(3) 作内力图。各段梁的支座反力求出后，分别画出梁 ABD 和梁 DC 的内力图，然后将其内力图连接在一起得所求多跨静定梁的内力图，如图 3.16(d)和(e)所示。

【例 3-5】 图 3.17(a)所示三跨静定梁，全长承受集度为 q 的均布荷载，各跨跨度均为 l，试调整铰 C、D 的位置，使 AB 跨及 EF 跨的跨中截面正弯矩与支座 B、E 处负弯矩的绝对值相等。

解：以 x 表示铰 $C(D)$ 与支座 $B(E)$ 之间的距离[图 3.17(a)]。梁 ABC、DEF 部分在竖向荷载作用下能独立地维持平衡，故为基本部分。梁段 CD 支承于基本部分 ABC 和 DEF 的上面，为附属部分。计算先从附属部分 CD 开始，其隔离体如图 3.17(b)所示。根据平衡条件，可求得 CD 梁的竖向约束反力为$\dfrac{q(l-2x)}{2}$。将其反向作用于基本部分上，然后计算基本部分，其 ABC 梁为隔离体，如图 3.17(c)所示(DEF 部分的受力情况与 ABC 部分相同)。在支座 B 处截面上产生的负弯矩为

$$M_B=-\left[\frac{q(l-2x)}{2}x+\frac{1}{2}qx^2\right]=-\left[\frac{qx(l-x)}{2}\right] \tag{a}$$

AB 跨中截面 G 的正弯矩按叠加法由图 3.17(d)求得

$$M_G=\frac{ql^2}{8}-\frac{|M_B|}{2}$$

根据题意 $$M_G=|M_B|$$

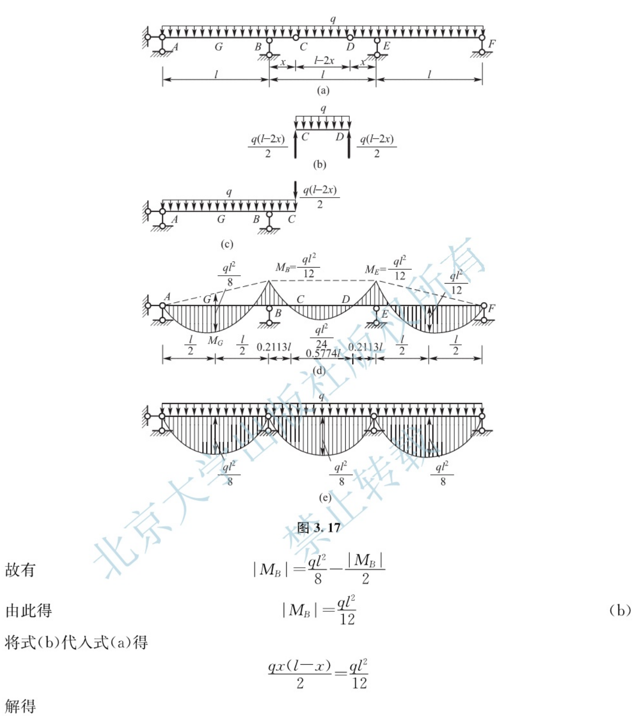


图 3.17

故有

$$|M_B| = \frac{ql^2}{8} - \frac{|M_B|}{2}$$

由此得

$$|M_B| = \frac{ql^2}{12} \tag{b}$$

将式(b)代入式(a)得

$$\frac{qx(l-x)}{2} = \frac{ql^2}{12}$$

解得

$$x = 0.2113l$$

铰 C、D 的位置确定以后，即可画出三跨静定梁的弯矩图，如图 3.17(d)所示，将它与图 3.17(e)所示相应的多跨简支梁的弯矩图比较后，可以看出：在多跨静定梁中，弯矩分布要均匀些。这是由于多跨静定梁中设置了伸臂梁。它一方面减小了附属部分 CD 的跨度，另一方面又使得伸臂上的荷载对基本部分产生负弯矩，从而部分地抵消了跨中荷载产生的正弯矩。因此，多跨静定梁比相应多跨简支梁节省材料，但其构造要复杂一些。

【例 3-6】 不计算反力而绘出图 3.18(a)所示多跨静定梁的内力图。

解： 按一般的解题步骤是先求出各支座反力及铰链处的约束力，然后作梁的剪力图和弯矩图。但是，如果能熟练地应用弯矩图的形状特征以及叠加法，则在某些情况下也可以

不计算反力而首先绘出弯矩图，然后再根据弯矩图作剪力图。

作弯矩图时从附属部分 EG 开始。FG 段的弯矩图与悬臂梁的相同，可直接绘出。D、F 间并无外力作用，故其弯矩图必为一段直线，只需定出两个点便可绘出此直线。现已知 $M_F=-8\text{kN}\cdot\text{m}$，而 E 处为铰，其弯矩应等于零，即 $M_E=0$。因此，将以上两点连以直线并将其延长至 D 点之下，即得 DF 段梁的弯矩图，并可定出 $M_D=8\text{kN}\cdot\text{m}$。用同样的方法可绘出 BD 段梁的弯矩图。最后，AB 段梁的弯矩图便可用叠加法绘出。这样，就未经计算反力而绘出了全梁的弯矩图，如图 3.18(b)所示。

有了弯矩图，剪力图即可根据微分关系或平衡条件求得。对于弯矩图为直线的区段，利用弯矩图的坡度(即斜率)来求剪力是很方便的，例如，DF 段梁的剪力值为

$$V_{DF}=-\frac{8+8}{4}=-4\text{kN}$$

至于剪力的正负号，可按如下方法迅速判定：若弯矩图是从基线顺时针方向转的(小于 90°的转角)，则剪力为正，反之为负。据此可知，V_{DF} 为负值。同理 BD 段梁的剪力值为

$$V_{BD}=\frac{8+8}{4}=4\text{kN}$$

对于弯矩图为曲线的区段，则根据弯矩图的切线斜率来计算剪力并不方便，此时可利用杆段的平衡条件来求得其两端剪力。例如 AB 段梁，可取出该段梁为隔离体(在截面 A 右和 B 左处截断)，受力图如图 3.18(c)所示。

由 $\sum M_A=0$，得

$$-4V_{BA}-4\times4\times2-8=0$$

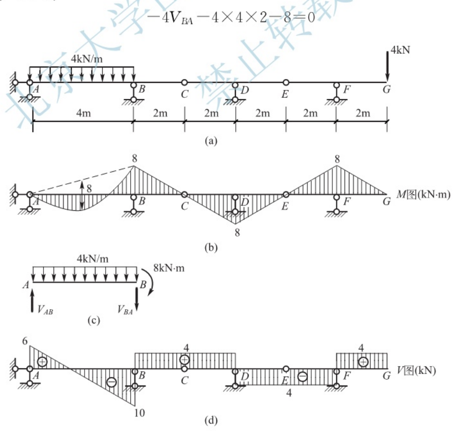


图 3.18

$$V_{BA}=-10\text{kN}$$

由$\sum M_B=0$，得

$$-4V_{AB}+4\times4\times2-8=0$$

$$V_{AB}=6\text{kN}$$

求得 AB 段两端剪力，在均布荷载作用区段剪力图应为斜直线，故将以上两点连以直线即得 AB 段梁的剪力图。整个多跨静定梁的剪力图如图 3.18(d)所示。

本 章 小 结

本章首先通过对简支梁、外伸梁、悬臂梁等单跨静定梁的内力计算和内力图的绘制，复习了求控制截面内力的方法及弯矩、剪力与荷载集度的关系，列出了内力图形的特征；对单跨斜梁也作了进一步的介绍；在单跨梁用叠加法绘制弯矩图的基础上，又着重学习了用分段叠加法绘制弯矩图；研究了多跨静定梁反力和内力的计算及内力图的绘制，采用层次图的方式将多跨静定梁的基本部分与附属部分分开；使多跨静定梁可以拆成若干个单跨梁，绘出其内力图，进而得到整个多跨静定梁的内力图。

关 键 术 语

静定结构(statically determinate structure)；梁(beam)；梁式结构(beam-type structure)；跨度(span)；简支梁(simple beam)；悬臂梁(cantilever beam)；外伸梁(overhang beam)；斜梁(skew beam)；内力(internal force)；剪力(shearing force)；弯矩(bending moment)；内力图(internal force diagram)；叠加法(superposition method)；静定多跨梁(statically determinate multi-span beam)；基本部分(basic portion)；附属部分(accessory part)；层次图(laminar superposition diagram)。

习 题 3

一、思考题

1. 用叠加法作弯矩图时，为什么是竖标的叠加，而不是图形的拼合?

2. 结构的基本部分与附属部分是如何划分的? 荷载作用在结构的基本部分上时，在附属部分是否会引起内力? 若荷载作用在附属部分时，是否在所有基本部分都会引起内力?

3. 为什么说一般情况下，多跨静定梁的弯矩比一系列相应简支梁的弯矩要小?

4. 怎样根据静定结构的几何组成情况(与地基按两刚片、三刚片规则组成，或具有基本部分与附属部分等)来确定计算反力的顺序和方法?

5. 当不求或少求反力而迅速作出弯矩图时，有哪些规律可以利用?

二、填空题

1. 静定结构的静力特征是：可用__________求出全部反力和内力；其几何特征是：

结构为不变体系，且无__________联系。

2. 静定梁内力分析的基本方法是__________，隔离体上建立的基本方程是__________。

3. 用截面法计算指定截面的内力为：剪力等于截面____________的所有外力沿截面方向的投影代数和；弯矩等于截面____________的所有外力对____________形心的力矩代数和。

4. 图 3.19 所示梁中，BC 段的剪力 V 等于______________，DE 段的弯矩等于__________。

5. 已知 AB 梁的 M 图如图 3.20 所示，当该梁的抗弯刚度改为 $2EI$，而荷载不变时，其最大弯矩值为________ kN·m。

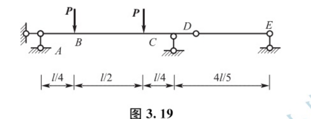


图 3.19

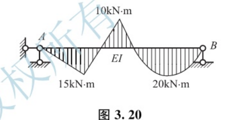


图 3.20

6. 工程中常见的三种单跨静定梁分别是________、________、________。

7. 荷载集度与剪力和弯矩之间的关系是________、________、________。

8. 在画梁的内力图时，集中力作用处__________有突变，集中力偶作用处________有突变。

9. 一个人站在简支梁中点所产生的弯矩，大约是躺在该梁上所产生的弯矩的________倍。

三、判断题

1. 图 3.21 所示为一杆段的 M、V 图，若 V 图正确，则 M 图一定是错误的。(　　)

2. 图 3.22 所示梁的弯矩图是正确的。(　　)

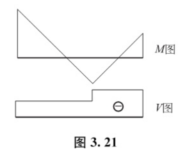


图 3.21

图 3.22

3. 荷载作用在静定多跨梁的附属部分时，基本部分一般内力不为零。(　　)

4. 多跨静定梁仅当基本部分承受荷载时，其他部分的内力和反力均为零。(　　)

5. 在无剪力直杆中，各截面弯矩不一定相等。(　　)

6. 图 3.23 所示结构 M 图的形状是正确的。(　　)

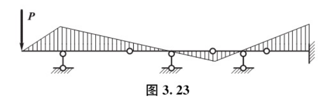
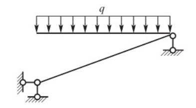


图 3.23

7. 图 3.24 所示同一简支斜梁，分别承受图示两种形式不同、集度相等的分布荷载时，其弯矩图相同。(　　)



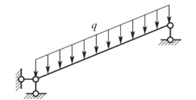


图 3.24

四、选择题

1. 对于水平梁某一指定的截面来说，在它(　　)的外力将产生正的剪力。
   A. 左侧向上或右侧向下　　B. 左侧或右侧向上
   C. 左侧向下或右侧向上　　D. 左侧或右侧向下
2. 对于水平梁某一指定的截面来说，在它(　　)的横向外力将产生正的弯矩。
   A. 左侧向上或右侧向下　　B. 左侧或右侧向上
   C. 左侧向下或右侧向上　　D. 左侧或右侧向下
3. 简支梁受均布荷载作用如图 3.25 所示，以下结论中(　　)是错误的。
   A. AC 段，剪力表达式为 $V=\frac{1}{4}qa$
   B. AC 段，弯矩表达式为 $M(x)=\frac{1}{4}qax$
   C. CB 段，剪力表达式为 $V=\frac{1}{4}qa-q(x-a)$
   D. CB 段，弯矩表达式为 $M(x)=\frac{1}{4}qax-\frac{1}{2}q(x-a)x$
4. 图 3.26 所示悬臂梁截面 B 上的剪力值和弯矩值分别为(　　)。
   A. $\frac{q_0a}{2}$，$\frac{-q_0a^2}{6}$　　B. q_0a，$\frac{-q_0a^2}{3}$　　C. $\frac{q_0a}{2}$，$\frac{q_0a^2}{3}$　　D. q_0a，$\frac{q_0a^2}{6}$
5. 图 3.27 所示简支梁中间截面 B 上的内力为(　　)。
   A. $M=0$，$V=0$　　B. $M=0$，$V\neq0$　　C. $M\neq0$，$V=0$　　D. $M\neq0$，$V\neq0$

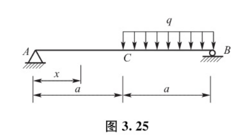


图 3.25

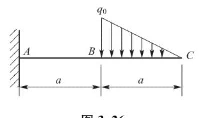


图 3.26

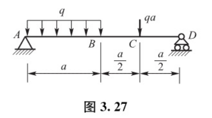


图 3.27

6. 图 3.28 所示结构所给出的 M 图形状是(　　)。
   A. 不能判定　　B. 错误的
   C. 有一部分是错误的　　D. 一定条件下是正确的
7. 图 3.29 所示结构(　　)。

A. ABC 段有内力　　B. ABC 段无内力

C. CDE 段无内力　　D. 全梁无内力

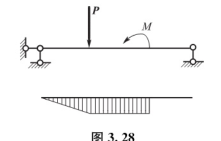


图 3.28

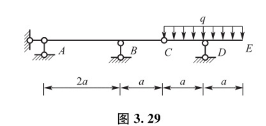
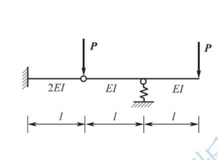


图 3.29

8. 图 3.30 所示结构弯矩图的形状为(　　)。



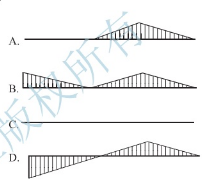


图 3.30

9. 如图 3.31 所示，该结构的跨中弯矩为(　　)。

A. 3kN・m，下侧受拉　　B. 3kN・m，上侧受拉

C. 4kN・m，下侧受拉　　D. 4kN・m，上侧受拉

10. 图 3.32 所示梁中，M_E 和 B 支座竖向反力 F_B 应为(　　)。

A. $M_E=F/4$(上部受拉)，$F_B=0$　　B. $M_E=0$，$F_B=F(\uparrow)$

C. $M_E=0$，$F_B=F/2(\uparrow)$　　D. $M_E=F/4$(上部受拉)，$F_B=F/2(\uparrow)$

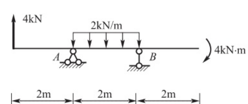


图 3.31

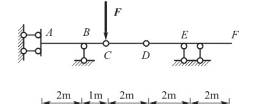


图 3.32

11. 图 3.33 所示的多跨静定梁，截面 K 的弯矩(以下侧受拉为正)M_K 为(　　)kN・m。

A. 5　　B. 6　　C. 9　　D. 13

12. 如图 3.34 所示，梁 A 端弯矩为(　　)。

A. M　　B. 0　　C. $2M$　　D. $3M$

五、计算题

1. 试作图 3.35 所示单跨梁或柱的内力图。

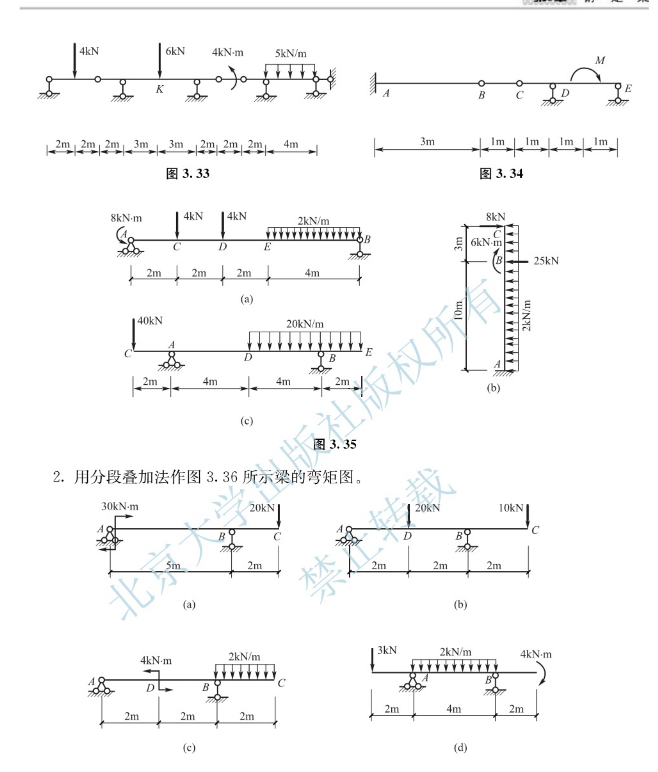


图 3.33

图 3.34

图 3.35

2. 用分段叠加法作图 3.36 所示梁的弯矩图。

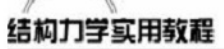
(e)

(f)

图 3.36

3. 试判断图 3.37 所示内力图正确与否，将错误改正。

4. 试作图 3.38 所示多跨静定梁的内力图。



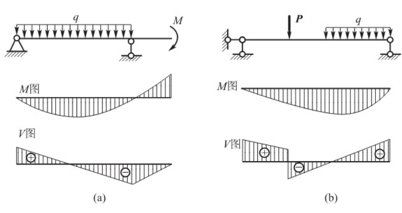


图 3.37

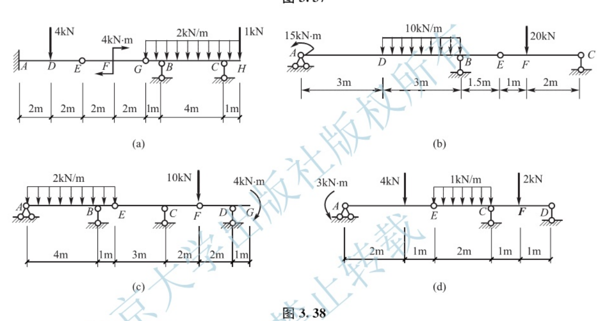


图 3.38

5. 试不计算支座反力而绘出图 3.39 所示梁的弯矩图。

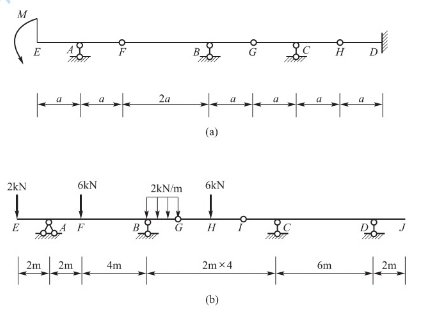


图 3.39

第4章 静定平面刚架

本章教学要点

知识模块	掌握程度	知识要点
静定平面刚架的内力计算、内力图的绘制及校核	掌握	刚架的分类
	掌握	悬臂刚架、简支刚架、三铰刚架的内力图
	掌握	刚结点的校核

本章技能要点

技能要点	掌握程度	应用方向
刚架的内力计算及内力图的绘制	掌握	杆件的强度、位移和超静定结构计算 结构的动力计算
结点平衡	掌握	计算结果的校核、判断刚架的变形



导入案例

信号灯支架上的力学

在街道的路口处，支撑着信号灯的支架一般如图4.1所示，悬臂杆上固定有若干个信号灯及指示牌。信号灯及指示牌的自重、悬臂杆的自重、大型车辆通行时引起的动荷载以及风荷载等荷载作用，都将通过与柱相连的刚结点传到柱上，再通过埋设在地面下的基础传到大地上。

与前面研究的梁相比，该支架除了有水平的悬臂梁杆件，还有竖直的柱杆件，以及连接梁与柱的刚结点、连接柱与大地的固定端。

悬臂梁杆件的内力计算及内力图的绘制仍如前所述，其上的荷载作用通过刚结点传到柱上，在柱上也必将引起内力。本章将对这种由若干个梁、柱及斜杆等杆件通过刚结点组成的结构，进行内力计算并绘制内力图形。



图4.1

4.1 刚架的特点及类型

1. 刚架的特点

刚架是由若干个直杆，通过全部或部分刚结点组成的结构。图 4.2(a)所示为一门式刚架的计算简图，其结点 C 和 D 是刚结点。在刚结点处，各杆端不能发生相对移动和相对转动，因而各杆件间的夹角始终保持不变，如图 4.2(a)所示，C、D 刚结点变形前后始终保持直角。如果把图 4.2(a)中的刚结点改为铰结点，体系便变成几何可变体系，如图 4.2(b)所示，要使它成为几何不变体系可增加杆 BC [图 4.3(c)]。可见，刚架依靠刚结点可用较少的杆件便能保持其几何不变性，而且内部空间大，便于利用。由于刚结点能约束杆端之间的相对转动，故能承受和传递弯矩，可以削减结构中弯矩的峰值，使弯矩分布较均匀，节省材料。图 4.3(a)中的梁和柱的结点为铰结点，图 4.3(b)为同高、同跨度的刚架，即梁和柱的结点为刚结点，当承受同样荷载时，其弯矩图如图 4.3(b)所示。可见由于刚结点能承担弯矩，使图 4.3(b)中横梁跨中弯矩的峰值比图 4.3(a)中梁的小，且分布均匀。刚架中的各杆为直杆，便于加工制作。因此，刚架在实际工程中得到广泛的应用。

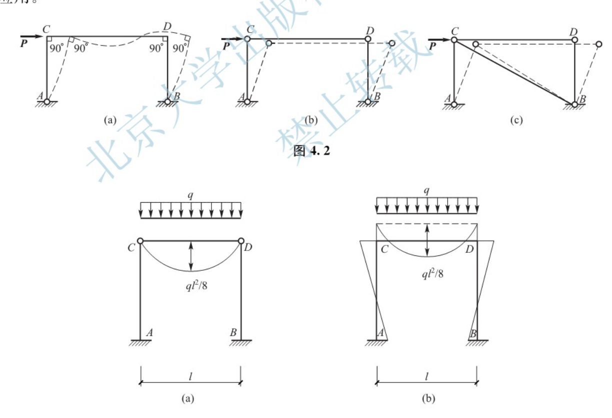


图 4.2

图 4.3

2. 刚架的类型

静定平面刚架按其支座约束的不同，基本上可以分为简支刚架 [图 4.4(a)]、悬臂刚架

[图 4.4(b)] 和三铰刚架 [图 4.4(c)]。由上述三种刚架中的某一种作为基本部分，再按几何不变体系的组成规则连接相应的附属部分组合而成的结构称为组合刚架 [图 4.4(d)]。

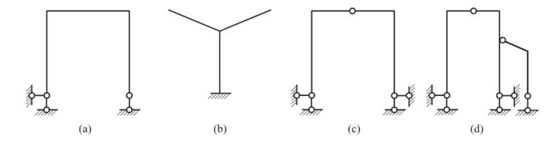


图 4.4

图 4.5(a)所示为一站台的雨棚，其计算简图如图 4.5(b)所示，图 4.6(a)所示为水利工程中的钢筋混凝土渡槽，在横向计算中，计算简图为简支的 ⊔ 形刚架 [图 4.6(b)]，图 4.7(a)所示为单层厂房或仓库的屋架，其计算简图如图 4.7(b)所示。

细石混凝土填缝

(a) (b)

图 4.5

渡槽

支架

(a) (b)

图 4.6

1—1 2—2 3—3

沥青麻刀

1:2水泥砂浆

(a) (b)

图 4.7

4.2 静定刚架支座反力的计算

在静定平面刚架的受力分析中，通常是先求支座反力，再求控制截面的内力，最后作

内力图。计算支座反力时，要注意刚架的几何构造特点，当刚架与基础按两刚片规则组成时，支座反力有三个，取刚架整体为隔离体，用平面一般力系平衡方程即可求得全部支座反力；当刚架与基础按三刚片规则组成时(如三铰刚架)，支座反力有四个，应先取刚架整体为隔离体，用平面一般力系平衡方程求得竖向支座反力，再取刚架的左半部(或右半部)为隔离体建立一个平衡方程(通常是对中间铰取矩的平衡方程)，即可求出水平支座反力；当刚架是由基本部分与附属部分组成时，应遵循先附属部分后基本部分的计算顺序求其支座反力。

【例 4－1】 计算图 4.8(a)所示三铰刚架的支座反力。

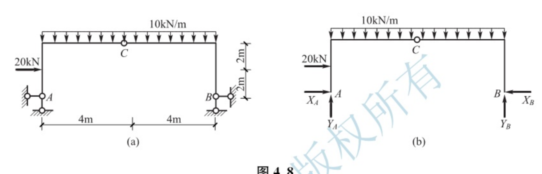


图 4.8

解：取整体为研究对象，受力图如图 4.8(b)所示。

$$\sum m_B=0,\quad -8Y_A-20\times2+10\times8\times4=0,\quad Y_A=35\text{kN}(\uparrow)$$

$$\sum m_A=0,\quad 8Y_B-20\times2-10\times8\times4=0,\quad Y_B=45\text{kN}(\uparrow)$$

取 BC 部分研究对象，由 $\sum m_C=0$，得

$$-4X_B+45\times4-10\times4\times2=0,\quad X_B=25\text{kN}(\leftarrow)$$

取整体为研究对象，由 $\sum X=0$，得

$$X_A+20-25=0,\quad X_A=5\text{kN}(\rightarrow)$$

【例 4－2】 计算图 4.9(a)所示组合刚架的支座反力。

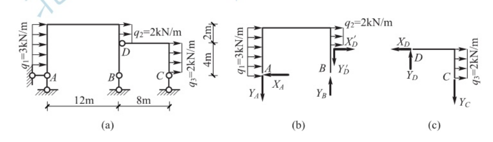


图 4.9

解：(1) 取附属部分 DC 为隔离体，受力图如图 4.9(c)所示。

列平衡方程，得

$$\sum m_D=0,\quad q_3\times4\times2-Y_C\times8=0$$

$$\sum X=0,\quad -X_D+q_3\times4=0$$

$$\sum Y=0,\quad Y_D-Y_C=0$$

解得

$$Y_C=2\text{kN}(\downarrow);\quad X_D=8\text{kN};\quad Y_D=Y_C=2\text{kN}$$

(2) 取基本部分 AB 为隔离体，受力图如图 4.9(b)所示。

$$\sum x=0,\quad -X_A+q_1\times 6+q_2\times 2+X'_D=0$$
$$\sum m_A=0,\quad Y_B\times 12-X'_D\times 4-Y'_D\times 12-q_2\times 2\times 5-q_1\times 6\times 3=0$$
$$\sum m_B=0,\quad Y_A\times 12-q_1\times 6\times 3-X'_D\times 4-q_2\times 2\times 5=0$$

解得

$$X_A=30\text{kN}(\leftarrow);\quad Y_A=8.83\text{kN}(\downarrow);\quad Y_B=10.83\text{ kN}(\uparrow)$$

4.3 静定刚架的内力计算与内力图

1. 静定刚架的内力计算

刚架的内力有弯矩、剪力和轴力。弯矩不规定正负号，剪力和轴力的正负号规定与梁相同。弯矩、剪力和轴力计算方法与梁也大体相同，即任一截面的轴力等于截面一侧所有外力沿截面法线方向投影的代数和，外力背离截面引起的轴力为正，指向截面引起的轴力为负。任一截面的剪力等于截面一侧所有外力沿截面方向投影的代数和，外力对所研究截面产生顺时针转动为正剪力，反之为负。任一截面的弯矩等于截面一侧所有外力对截面形心力矩的代数和。

为了区别相交于同一结点的不同杆件横截面的内力，使之表达得清晰，在内力符号后面引用两个脚标：第一个表示内力所属截面，第二个表示该截面所属杆件的另一端。例如杆件 BC，B 端的弯矩用 M_{BC} 表示，而 C 端的弯矩则用 M_{CB} 表示。

2. 静定刚架的内力图

刚架内力图基本作法是把刚架拆成若干个杆件，计算各杆件的杆端内力后分别绘出内力图，将各杆件内力图合在一起即可得到刚架的内力图。绘制内力图时应注意：弯矩图画在杆件的受拉侧，不注明正负号；剪力图和轴力图可画在杆件的任一侧，但必须注明正负号。

1）悬臂刚架的内力图

悬臂刚架由于支座一端为固定端，另一端为自由端，因此一般可以不先求支座反力，而从自由端开始求内力。

【例 4-3】 作图 4.10(a)所示悬臂刚架的内力图。

解：（1）作 M 图。

本刚架可按三根杆考虑。由弯矩计算法则直接计算各杆杆端弯矩值。

$M_{CB}=0$，　$M_{BC}=8\times 4=32\text{kN}\cdot\text{m}$(上侧受拉)

$M_{DB}=0$，　$M_{BD}=2\times 4\times 2=16\text{kN}\cdot\text{m}$(上侧受拉)

$M_{BA}=8\times 4-2\times 4\times 2=16\text{kN}\cdot\text{m}$(右侧受拉)，$M_{AB}=16\text{kN}\cdot\text{m}$(右侧受拉)

在杆的受拉边画弯矩图的竖标。杆 CB 和杆 BA 上无荷载，将杆的两端杆端弯矩的竖标连以直线，即得杆 CB 和杆 BA 的弯矩图。杆 BD 上有向下的均布荷载作用，又由于 D 截面剪力为零，故将杆的两端杆端弯矩的竖标用凸向下的抛物线连接，抛物线在 D 点处与杆件轴线相切，即得杆 BD 的弯矩图。刚架的 M 图如图 4.10(b)所示。

（2）作 V 图。

由剪力计算法则直接计算各杆杆端剪力值。

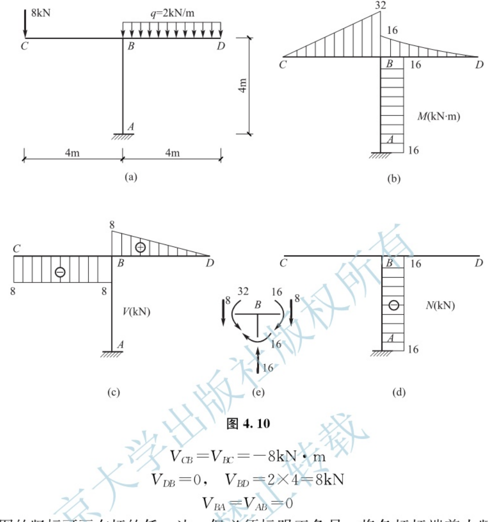


图 4.10

$$V_{CB}=V_{BC}=-8\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$V_{DB}=0,\quad V_{BD}=2\times4=8\text{kN}$$

$$V_{BA}=V_{AB}=0$$

剪力图的竖标可画在杆的任一边，但必须标明正负号。将各杆杆端剪力竖标连以直线，即得各杆的剪力图。刚架的 V 图如图 4.10(c)所示。

(3) 作 N 图。

由轴力计算法则直接计算各杆杆端轴力值。

$$N_{CB}=N_{BC}=0$$

$$N_{DB}=N_{BD}=0$$

$$N_{BA}=N_{AB}=-8-4\times2=-16\text{kN}$$

轴力图的竖标可画在杆的任一边，但必须标明正负号。将各杆杆端轴力竖标连以直线，即得各杆的轴力图。刚架的 N 图如图 4.10(d)所示。

(4) 校核。

对于弯矩图，通常是检查刚结点处是否满足力矩平衡条件。例如取结点 B 为隔离体，在隔离体的截面上分别画上计算所得的杆端内力 [图 4.10(e)]，有

$$\sum m_B=32-16-16=0$$

可见，这一平衡条件满足。

通过上述结点平衡条件研究可以发现，由两个以上杆相交组成的刚结点，当结点处无集中力偶作用时，所有杆端弯矩代数和为零。

为了校核剪力图和轴力图的正确性，可取刚架的任何部分为隔离体检查$\sum X=0$和$\sum Y=0$是否得到满足。例如结点B为隔离体［图 4.10(e)］，有

$$\sum X=0$$

$$\sum Y=16-8-8=0$$

故知此结点投影条件无误。

2）简支刚架的内力图

简支刚架端部均有支座约束存在，求内力时至少要考虑截面一侧外力，故须先确定支座反力。

【例 4-4】 绘制图 4.11(a)所示简支刚架的内力图。

解：(1) 求支座反力。

取刚架整体为隔离体，受力分析如图 4.11(a)所示。

$$\sum X=0,\quad 4-X_A=0,\quad X_A=4\text{kN}(\leftarrow)$$

$$\sum m_A=0,\quad Y_D\times 6-10\times 6\times 3-4\times 3=0,\quad Y_D=32\text{kN}(\uparrow)$$

$$\sum m_D=0,\quad 10\times 6\times 3-4\times 3-Y_A\times 6=0,\quad Y_A=28\text{kN}(\uparrow)$$

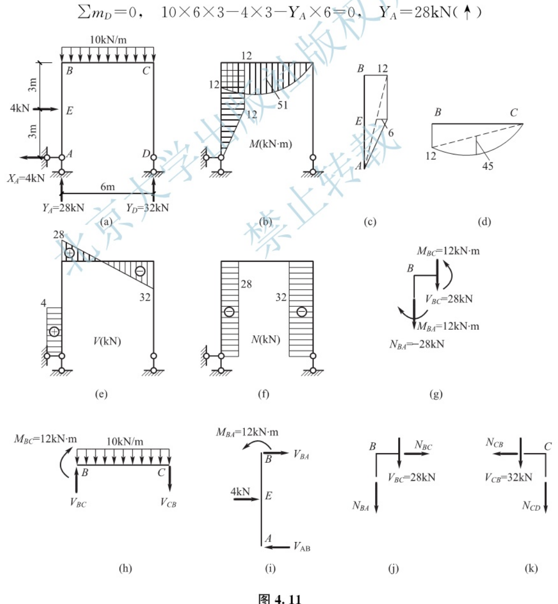


图 4.11

(2) 作 M 图。

本刚架可按三根杆考虑。由弯矩计算法则直接计算各杆杆端弯矩值。

$$M_{AB}=0,\quad M_{BA}=4\times6-4\times3=12\text{kN}\cdot\text{m}(\text{右侧受拉})$$

$$M_{BC}=32\times6-10\times6\times3=12\text{kN}\cdot\text{m}(\text{下侧受拉}),\quad M_{CB}=0$$

$$M_{CD}=0,\quad M_{DC}=0$$

在杆受拉边的杆端画上计算所得的弯矩竖标，AB 杆上有集中力作用，将杆端弯矩竖标先连以虚线，再叠加相应简支梁受该集中力作用的弯矩图，即为此杆的弯矩图［图 4.11(c)］。BC 杆上有均布荷载作用，将杆端弯矩竖标先连以虚线，再叠加相应简支梁受该均布荷载作用的弯矩图，即为此杆的弯矩图［图 4.11(d)］。CD 杆上无荷载作用，将杆端弯矩竖标连以直线，即为该杆弯矩图。刚架的 M 图如图 4.11(b)所示。

(3) 作 V 图。

由剪力计算法则直接计算各杆杆端剪力值。AB 杆上，由于集中力作用，剪力应分两段计算。

$$V_{AE}=V_{EA}=4\text{kN},\quad V_{EB}=V_{BE}=4-4=0$$

$$V_{BC}=28\text{kN},\quad V_{CB}=-32\text{kN}$$

$$V_{CD}=0,\quad V_{DC}=0$$

将各杆杆端剪力竖标连以直线，即得各杆的剪力图。刚架的 V 图如图 4.11(e)所示。

(4) 作 N 图。

由轴力计算法则直接计算各杆杆端轴力值。

$$N_{AB}=N_{BA}=-28\text{kN}$$

$$N_{BC}=N_{CB}=0$$

$$N_{CD}=N_{DC}=-32\text{kN}$$

将各杆杆端轴力竖标连以直线，即得各杆的轴力图。刚架的 N 图如图 4.11(f)所示。

(5) 校核。

以结点 B 为例作校核。在刚架中取刚结点 B 为隔离体［图 4.11(g)］，有

$$\sum m_B=12-12=0$$

$$\sum X=0$$

$$\sum Y=28-28=0$$

通过上述结点平衡条件研究可以发现，两杆汇交于一个刚结点，当结点处无集中力偶作用时，结点两侧弯矩必相等相反，且如果一侧为内侧受拉则另一侧也为内侧受拉，如果一侧为外侧受拉另一侧也为外侧受拉，即同侧受拉。这一规律将加速刚架弯矩图的绘制。

【例 4-5】 对于图 4.11(a)所示简支刚架，试根据 M 图作其 V 图和 N 图。

解： 例 4-4 题作 V 图和 N 图时，杆端剪力和杆端轴力是根据截面一侧的荷载及支座反力用计算法则直接求出的。现在介绍另一种作法：首先作 M 图，然后取杆件为隔离体，利用杆端弯矩求杆端剪力，最后取结点为隔离体，利用杆端剪力求杆端轴力。

(1) 求杆端剪力。

取 BC 杆为隔离体，根据已经作出的弯矩图［图 4.11(b)］画出杆端截面的弯矩 M_{BC} ($M_{CB}=0$)，未知杆端剪力 V_{BC} 和 V_{CB} 按正方向画出，如图 4.11(h)所示。应用平衡方程，得

$$\sum m_C=0,\quad -6V_{BC}-12+10\times6\times3=0,\quad V_{BC}=28\text{kN}$$

$$\sum m_B=0,\quad 6V_{CB}-12-10\times6\times3=0,\quad V_{CB}=-32\text{kN}$$

同理，取 AB 杆为隔离体［图 4.11(i)］，可得

$$V_{AB}=4\text{kN},\quad V_{BA}=0$$

(2) 求杆端轴力。

取 B 结点为隔离体，根据已经作的剪力图［图 4.11(b)］画出杆端截面的剪力 V_{BC} ($V_{BA}=0$)，未知杆端轴力 N_{BA} 和 N_{BC} 设为拉力，如图 4.11(j)所示。应用平衡方程，得

$$\sum X=0,\quad N_{BC}=0$$

$$\sum Y=0,\quad -N_{BA}-28=0,\quad N_{BA}=-28\text{kN}$$

同理，取 C 结点为隔离体［图 4.11(k)］，可得

$$N_{CB}=0,\quad N_{CD}=-32\text{kN}$$

两种方法所得的结果相同。对于复杂的情况，以第二种方法较为方便。

3) 三铰刚架的内力图

计算三铰刚架内力必须先求支座反力，求支座反力时必须整体平衡与局部平衡联合应用。

【例 4-6】 作图 4.12(a)所示三铰刚架的内力图。

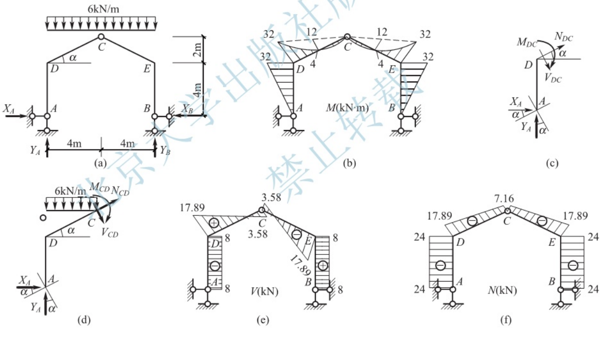


图 4.12

解：(1) 求支座反力。

取刚架整体为隔离体，由平衡条件得

$$\sum m_B=0,\quad -8Y_A+6\times8\times4=0,\quad Y_A=24\text{kN}(\uparrow)$$

$$\sum m_A=0,\quad 8Y_B-6\times8\times4=0,\quad Y_B=24\text{kN}(\uparrow)$$

取 AC 部分为隔离体，由 $\sum m_C=0$，得

$$6X_A+6\times4\times2-24\times4=0,\quad X_A=8\text{kN}(\rightarrow)$$

取整体为研究对象，由 $\sum X=0$，得

$$-X_B+8=0,\quad X_B=8\text{kN}(\leftarrow)$$

(2) 作 M 图。

计算各杆杆端弯矩值：

$$M_{AD}=0,\quad M_{DA}=8\times4=32\text{kN}\cdot\text{m}(\text{左侧受拉})$$
$$M_{DC}=32\text{kN}\cdot\text{m}(\text{上侧受拉}),\quad M_{CD}=0$$
$$M_{CE}=0,\quad M_{EC}=8\times4=32\text{kN}\cdot\text{m}(\text{上侧受拉})$$
$$M_{EB}=32\text{kN}\cdot\text{m}(\text{右侧受拉}),\quad M_{BE}=0$$

杆 AD、BE 上无荷载作用，两端弯矩竖标连以直线，即得弯矩图；杆 DC、CE 上有均布荷载作用，两端弯矩竖标连以虚线，再叠加简支梁在相应荷载作用下的弯矩图。杆 DC、CE 中点的弯矩值

$$M=-\frac{32}{2}+\frac{6\times4^2}{8}=-4\text{kN}\cdot\text{m}(\text{上侧受拉})$$

三铰刚架的 M 图如图 4.12(b)所示。

(3) 作 V 图。

计算各杆杆端剪力值：

$V_{AD}=V_{DA}=-8\text{kN}$

$V_{DC}=Y_A\cos\alpha-X_A\sin\alpha=24\times\frac{2}{\sqrt{5}}-8\times\frac{1}{\sqrt{5}}=17.89\text{kN}$ [图 4.12(c)]

$V_{CD}=Y_A\cos\alpha-X_A\sin\alpha-4q\cos\alpha=24\times\frac{2}{\sqrt{5}}-8\times\frac{1}{\sqrt{5}}-4\times6\times\frac{2}{\sqrt{5}}=-3.58\text{kN}$ [图 4.12(d)]

同理，可得

$$V_{CE}=3.58\text{kN}$$
$$V_{EC}=-17.89\text{kN}$$
$$V_{EB}=V_{BE}=8\text{kN}$$

将各杆杆端剪力竖标连以直线，即得三铰刚架的 V 图如图 4.12(e)所示。

(4) 作 N 图。

计算各杆杆端轴力值：

$N_{AD}=N_{DA}=-24\text{kN}$

$N_{DC}=-Y_A\sin\alpha-X_A\cos\alpha=-24\times\frac{1}{\sqrt{5}}-8\times\frac{2}{\sqrt{5}}=-17.89\text{kN}$ [图 4.12(c)]

$N_{CD}=-Y_A\sin\alpha-X_A\cos\alpha+4q\sin\alpha=-24\times\frac{1}{\sqrt{5}}-8\times\frac{2}{\sqrt{5}}+4\times6\times\frac{1}{\sqrt{5}}=-7.16\text{kN}$

[图 4.12(d)]

同理，可得

$$N_{CE}=-7.16\text{kN}$$
$$N_{EC}=-17.89\text{kN}$$
$$N_{EB}=N_{BE}=-24\text{kN}$$

将各杆杆端轴力竖标连以直线，得三铰刚架的 N 图如图 4.12(f)所示。

观察 M 图、V 图和 N 图可以发现：结构对称、荷载对称时，弯矩图对称、剪力图反对称、轴力图对称。根据此特点可以检查内力图的正确性。

4）组合刚架的内力图

组合刚架可以拆开计算。如同多跨静定梁一样，分清组合刚架的基本部分和附属部分，遵循先附属部分后基本部分的计算原则。

【例 4－7】 作图 4.13(a)所示组合刚架的弯矩图。

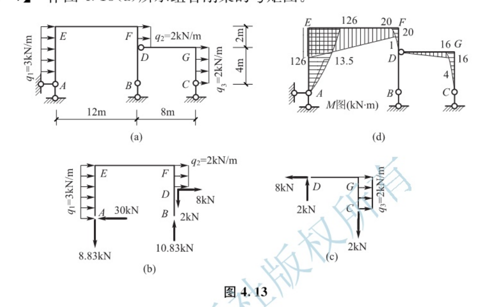


图 4.13

解：（1）计算支座计算反力及约束力。

已在例 4－2 中求得，重示于图 4.13(b)、(c)。

（2）作 M 图。

$M_{AE}=0$， $M_{EA}=30\times6-3\times6\times3=126\text{kN}\cdot\text{m}$(右侧受拉)

$M_{EF}=126\ \text{kN}\cdot\text{m}$(下侧受拉)， $M_{FE}=8\times2+2\times2\times1=20\text{kN}\cdot\text{m}$(下侧受拉)

$M_{FD}=20\text{kN}\cdot\text{m}$(左侧受拉)， $M_{DF}=0$

$M_{DG}=0$， $M_{GD}=2\times8=16\ \text{kN}\cdot\text{m}$(下侧受拉)

$M_{GC}=16\ \text{kN}\cdot\text{m}$(左侧受拉)， $M_{CG}=0$

根据 M 图绘制规定，作 M 图如图 4.13(d)。

本 章 小 结

本章首先介绍了刚架及刚结点的概念，对静定刚架进行了分类：按其支座约束的不同，分为简支刚架、悬臂刚架和三铰刚架。

对刚架的分析过程可分为：①计算反力，悬臂刚架可不计算反力；②分段、定形；③计算控制截面的内力；④描点连线。

在梁的杆端截面内力计算的基础上，强调指定截面内力计算方法。

介绍了在刚结点处应满足$\sum M=0$，$\sum F_x=0$，$\sum F_y=0$ 的平衡条件，总结了刚结点处$\sum M=0$ 在弯矩图形上的特点。

掌握以下若干规律，对于一些结构可以不求反力或少求反力或只需判定反力的方向，即可迅速作出结构的弯矩图：

（1）首先绘出结构上的悬臂部分和简支梁(含两端铰结的受弯直杆)部分的弯矩图；

(2) 充分利用荷载、剪力、弯矩三者之间的微分关系;
(3) 铰结点处的弯矩为零,刚结点处力矩平衡;
(4) 与杆轴共线的外力不产生弯矩;
(5) 利用区段叠加法作弯矩图形;
(6) 对称性的利用。

关 键 术 语

刚结点(rigid joint);刚架(frame);静定平面刚架(statically determinate plane frame);简支刚架(simple frame);悬臂刚架(cantilever frame);三铰刚架(three-hinged frame)。

习 题 4

一、思考题

1. 简述刚结点和铰结点在变形、受力方面的区别。以结点为隔离体建立平衡方程时,两者有何区别?

2. 刚架杆件截面内力正负号是怎样规定的?为什么刚架杆端截面的内力需用两个下标表示?

3. 两个相互垂直的杆件组成的结点,其剪力与轴力有何关系?

4. 怎样根据弯矩图来作剪力图?又怎样继续作出轴力图及求出支座反力?

5. 作刚架弯矩图有何规律?容易出现哪些错误?

二、填空题

1. 图 4.14 所示结构中,M_{AD}=________ kN·m,____侧受拉,M_{CD}=________ kN·m。

2. 图 4.15 所示结构中,m 为 8kN·m,BC 杆的内力是 M=______,V=______,N=______。

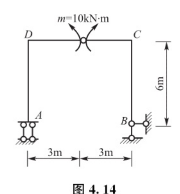


图 4.14

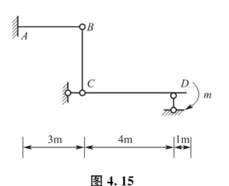


图 4.15

3. 刚结点与铰结点的区别在于:刚结点处各杆杆端转角______,可承受和传递______。

4. 图 4.16 所示结构 K 截面的 M 值为____________，______侧受拉 。

5. 图 4.17 所示结构 K 截面的 M 值为____________，______侧受拉。

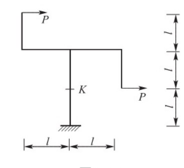


图 4.16

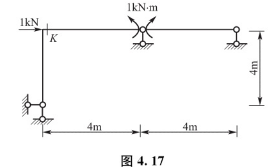


图 4.17

6. 图 4.18 所示结构 K 截面的 M 值为____________，______侧受拉。

7. 图 4.19 所示结构 K 截面的 M 值为____________，______侧受拉。

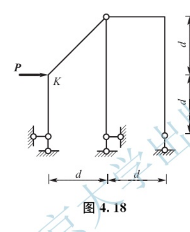


图 4.18

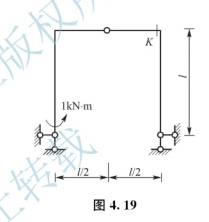


图 4.19

三、判断题

1. 刚架在荷载作用下的内力有剪力和弯矩，不会产生轴力。（　　）

2. 图 4.20 所示结构的弯矩图是正确的。（　　）

3. 图 4.21 所示结构 $M_K=\dfrac{ql^2}{2}$(内侧受拉)。（　　）

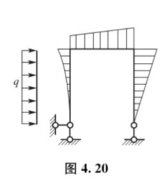


图 4.20

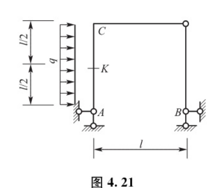
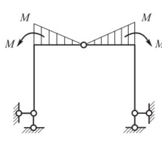
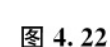


图 4.21

4. 图 4.22 所示结构弯矩图是正确的。（　　）

5. 图 4.23 所示结构弯矩图形状是正确的。（　　）




图 4.22

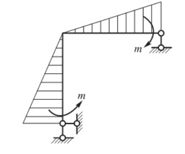


图 4.23

6. 图 4.24(a)所示结构的剪力图形状如图 4.24(b)所示。(　　)

7. 图 4.25 所示结构弯矩图形状是正确的。(　　)

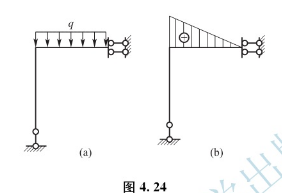


图 4.24

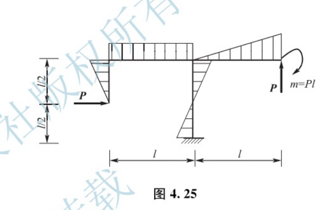


图 4.25

四、选择题

1. 图 4.26 所示结构 M_{DC}(设下侧受拉为正)为(　　)。

   A. $-Pa$　　　　B. Pa

   C. $-Pa/2$　　　　D. $Pa/2$

2. 图 4.27 所示结构 M_K(设下侧受拉为正)为(　　)。

   A. $qa^2/2$　　　　B. $-qa^2/2$

   C. $3qa^2/2$　　　　D. qa^2

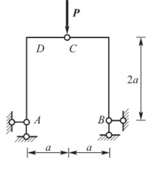


图 4.26

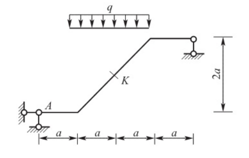


图 4.27

3. 图 4.28 所示刚架中，M_{AC} 应等于(　　)。

   A. 2kN·m(右侧受拉)　　　　B. 2kN·m(左侧受拉)

C. 4kN·m（右侧受拉） D. 6kN·m(左侧受拉)。

4. 图 4.29 所示结构中 M_{AC} 和 M_{BD} 全对的是(　　)。

A. $M_{AC}=Ph$（左侧受拉），$M_{BD}=Ph$（左侧受拉）

B. $M_{AC}=Ph$（左侧受拉），$M_{BD}=0$

C. $M_{AC}=0$，$M_{BD}=Ph$（左侧受拉）

D. $M_{AC}=Ph/3$(左侧受拉)，$M_{BD}=2Ph/3$(左侧受拉)

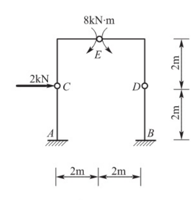


图 4.28

图 4.29

5. 图 4.30 所示结构中 M_{CA} 和 V_{CB} 为(　　)。

A. $M_{CA}=0$，$V_{CB}=\frac{m}{l}$

B. $M_{CA}=0$，$V_{CB}=0$

C. $M_{CA}=m$(左侧受拉)，$V_{CB}=0$

D. $M_{CA}=m$(左侧受拉)，$V_{CB}=-\frac{m}{l}$

6. 图 4.31 所示结构中，M_{EG} 和 V_{BA} 全对的是(　　)。

A. $M_{EG}=16$ kN·m(上侧受拉)，$V_{BA}=8$kN

B. $M_{EG}=16$ kN·m(下侧受拉)，$V_{BA}=0$

C. $M_{EG}=16$ kN·m(下侧受拉)，$V_{BA}=-8$kN

D. $M_{EG}=16$ kN·m(上侧受拉)，$V_{BA}=16$kN

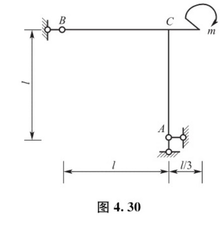


图 4.30

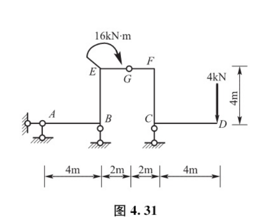


图 4.31

7. 图 4.32 中正确的 M 图是(　　)。

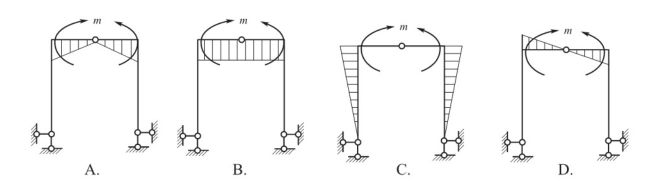


图 4.32

8. 如图 4.33 所示，刚架 DA 杆件 D 截面的弯矩 M_{DA} 之值为(　　)。

A. 35kN·m (上侧受拉)　　B. 62kN·m (上侧受拉)

C. 40kN·m (下侧受拉)　　D. 45kN·m (下侧受拉)

9. 如图 4.34 所示，刚架 DE 杆件 D 截面的弯矩 M_{DE} 之值为(　　)。

A. qa^2(左侧受拉)　　B. $2qa^2$(右侧受拉)

C. $4qa^2$(左侧受拉)　　D. $1.5qa^2$(右侧受拉)

图 4.33

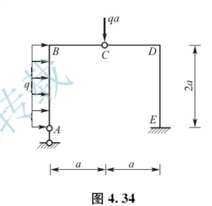


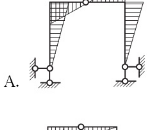
图 4.34

10. 如图 4.35 所示结构中，无论跨度、高度如何变化，M_{CB} 永远等于 M_{BC} 的(　　)。

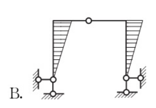
A. 1 倍(外侧受拉)　　B. 2 倍(外侧受拉)

C. 2 倍(内侧受拉)　　D. 1 倍(内侧受拉)

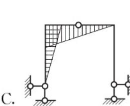
11. 如图 4.36 所示，该结构弯矩图形状正确的是(　　)。



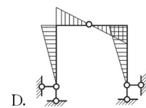
A.



B.



C.



D.

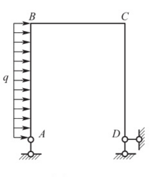


图 4.35

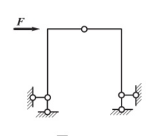


图 4.36

12. 图 4.37 所示两结构的内力是：(　　)。

A. 弯矩相同，剪力不同

B. 弯矩相同，轴力不同

C. 弯矩不同，剪力相同

D. 弯矩不同，轴力不同

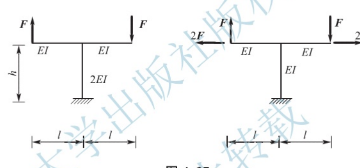


图 4.37

13. 图 4.38 所示结构截面 A 的弯矩(以下侧受拉为正) 是(　　)。

A. $-2m$　　B. $-m$

C. 0　　D. m

14. 如图 4.39 所示的结构，B 点杆端弯矩(设内侧受拉为正)为(　　)。

A. $M_{BA}=Fa$，$M_{BC}=-Fa$　　B. $M_{BA}=M_{BC}=2Fa$

C. $M_{BA}=M_{BC}=Fa$　　D. $M_{BA}=M_{BC}=0$

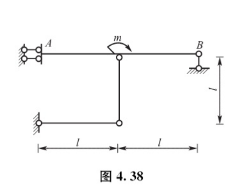


图 4.38

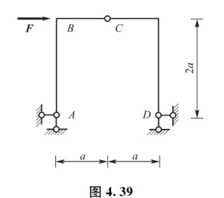


图 4.39

五、计算题

1. 作图 4.40 所示悬臂刚架的内力图。

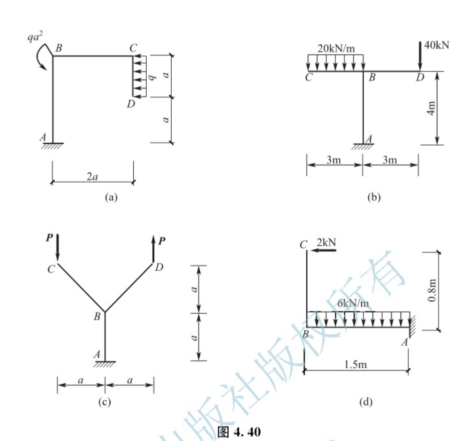


图 4.40

2. 作图 4.41 所示简支刚架的内力图。

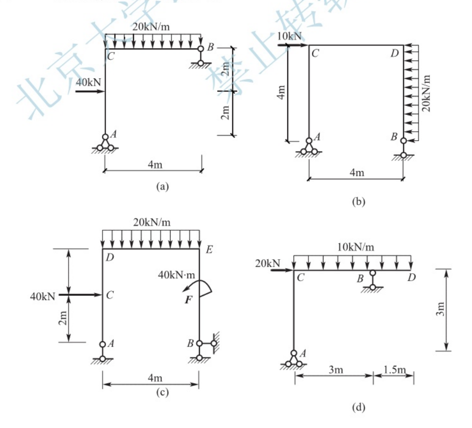


图 4.41

3. 作图 4.42 所示刚架的内力图。

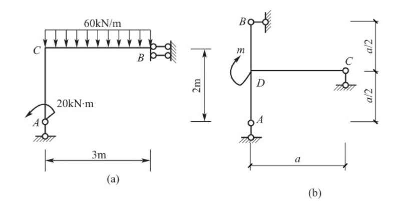


图 4.42

4. 作图 4.43 所示三铰刚架的内力图。

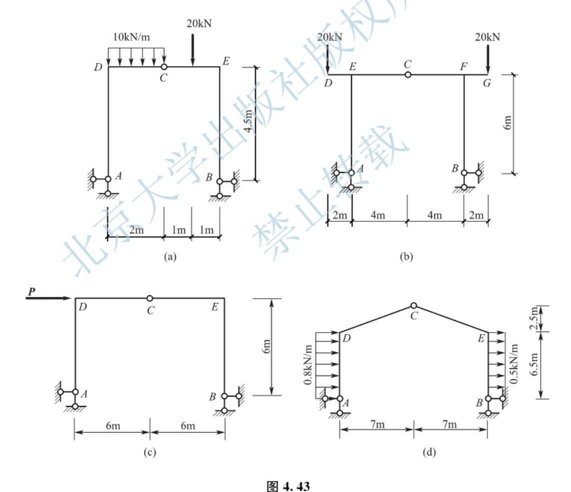
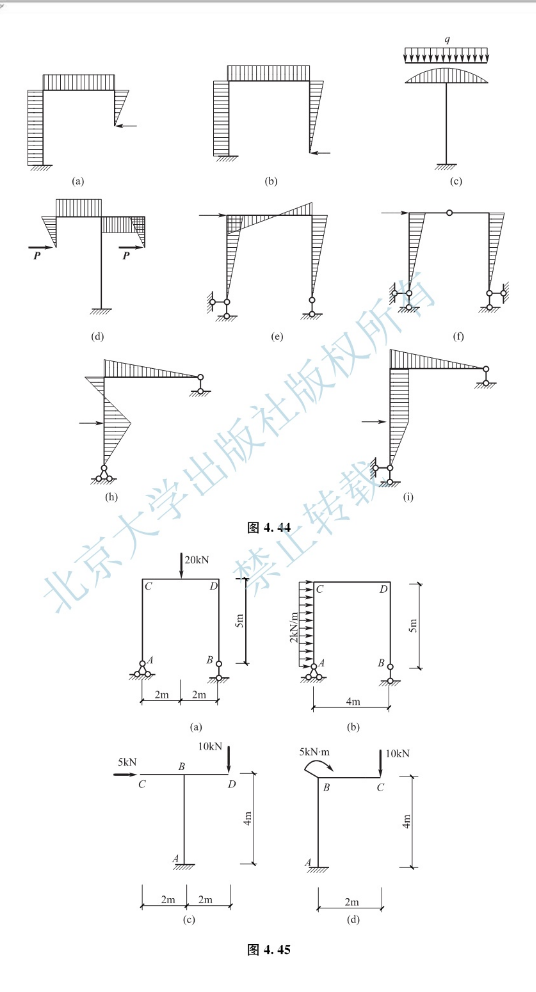


图 4.43

5. 试检查图 4.44 所示 M 图的正误，并加以改正。
6. 速作图 4.45 所示结构的弯矩图。
7. 作图 4.46 所示组合刚架的弯矩图。
8. 试绘出图 4.47 所示结构弯矩图的形状。


q
(a)
(b)
(c)
P
P
(d)
(e)
(f)
(h)
(i)
图 4.44
20kN
C
D
A
B
5m
2m
2m
(a)
2kN/m
C
D
A
B
5m
4m
(b)
5kN
10kN
C
B
D
A
4m
2m
2m
(c)
5kN·m
10kN
B
C
A
4m
2m
(d)
图 4.45

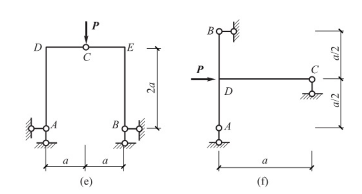


图 4.45(续)

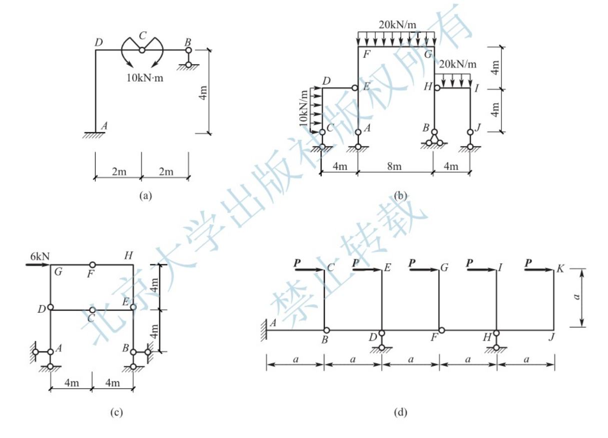


图 4.46

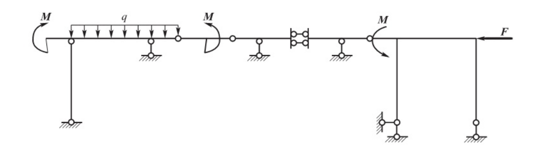


图 4.47

第5章 三 铰 拱

本章教学要点

知识模块	掌握程度	知识要点
三铰拱的内力计算方法 合理拱轴的概念	掌握	三铰拱的反力计算、推力的计算公式
	掌握	三铰拱指定截面的确定
	掌握	三铰拱的内力计算
	理解	合理拱轴的概念、均布荷载下的合理拱轴

本章技能要点

技能要点	掌握程度	应用方向
三铰拱的反力计算	掌握	结构设计 超静定拱的计算
三铰拱的内力计算	掌握	



一千四百多年前的拱桥

一千多年以前，人们建造的桥梁除了简支桥梁外，更多的就是石拱桥了。我国古代石拱桥的杰出代表是举世闻名的河北省赵县的赵州桥(又称安济桥，如图5.1所示)，该桥在隋代(公元605年)由著名工匠李春设计和建造，距今已有1400多年的历史，是当今世界上现存最早、保存最完善的古代敞肩石拱桥。拱桥净跨37m，宽9m，拱矢高度7.23m，在拱圈两肩各设有两个跨度不等的腹拱(敞肩)，这样既能减轻桥身自重、节省材料、便于排洪，又呈现出美观的效果。欧洲直到19世纪中期才出现了这样的敞肩



图5.1

拱桥，比我国晚了1200多年。1991年，美国土木工程师学会选定赵州桥为世界第十二处“国际土木工程历史古迹”。

石拱桥的形式有多种多样，公元前一世纪在法国建造的尼姆水道就是由上下三层连续的石拱构成(图5.2)，水道总长269m，最高处离地面达49m。第一层由6个跨度不等的拱券组成；第二层高度大约20m，由11个跨度相等的拱券组成；第三层的高度是8.5m，由35个跨度相同的拱券组成。

石拱不仅应用在桥梁上，欧洲早期的建筑大多数也是按拱结构的形式建造的。图5.3所示的建筑“剖面图”，是建于13世纪中叶的德国海德堡王宫的一幢三层楼房。从“剖面图”中可清楚地看到，该楼房的结构是由三层两跨环形拱组成的，注意到外圈厚重的墙体是为了提供给拱券足够的推力。建于公元60年的罗马斗兽场的剖面图如图5.4所示，从图中可以看出，在大约2000年前，欧洲的建筑师就已经将拱券在建筑中的应用，发挥得淋漓尽致了。图5.5所示为举世闻名的秦始皇兵马俑展馆的三铰拱钢屋架，其跨度为72米，拱脚落在巨大的钢筋混凝土支座上。

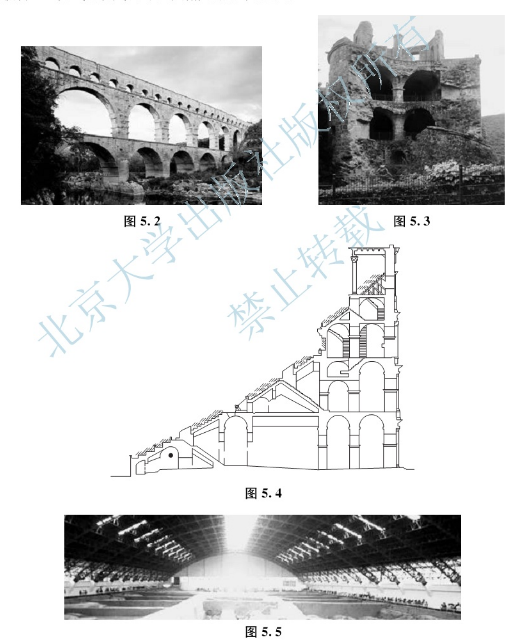


图5.2

图5.3

图5.4

图5.5

本章将从最简单的静定拱开始，介绍拱的组成、特点及反力和内力的计算方法。

5.1 三铰拱的特点

拱是指杆的轴线是曲线，并在竖向荷载作用下会产生水平支座反力(又称水平推力)的结构。拱结构的计算简图通常有三种，如图5.6所示，其中图5.6(a)和(b)所示的无铰拱和两铰拱是超静定结构，图5.6(c)所示的三铰拱是静定结构。在本章中将只讨论三铰拱的计算。

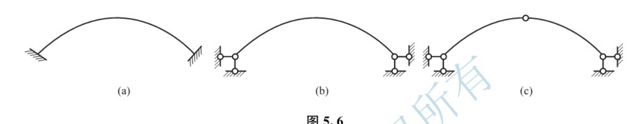


图5.6

三铰拱的基本特点是在竖向荷载作用下，除产生竖向反力外，还产生水平推力。水平推力对拱的内力产生重要的影响，水平推力的存在使三铰拱各截面上的弯矩值小于与三铰拱相同跨度、相同荷载作用下的简支梁各对应截面上的弯矩值。因此，拱与相应简支梁比较，它的优点是用料比梁节省而自重较轻，故能跨越较大的空间。此外，由于拱主要是承受轴向压力，故建造时可以充分利用抗拉性能弱而抗压性能强的材料，如砖、石、混凝土等。但是，拱的缺点是构造比较复杂、施工费用较大。同时，由于推力的存在，拱需要有较为坚固的基础或支承结构(如墙、柱、墩、台等)。

三铰拱各部分的名称如图5.7所示。

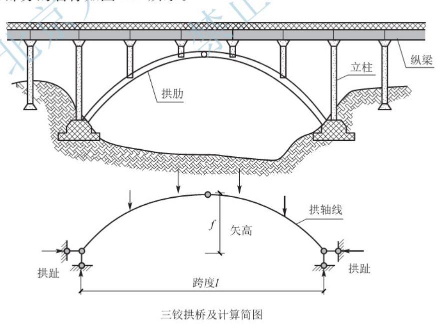
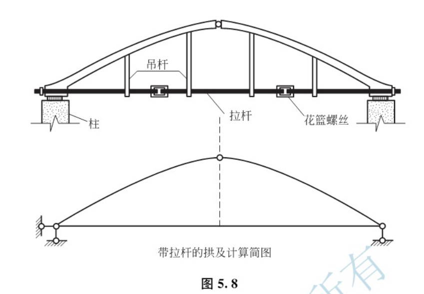


图5.7

在屋架中，为消除水平推力对墙或柱的影响，在两支座间增加一拉杆，由拉杆来承担水平推力，称为带拉杆的三铰拱，如图5.8所示。



带拉杆的拱及计算简图

图 5.8

在铁路拱桥中，为了降低桥面高度，还可将桥面吊在拱上，如图 5.9 所示。

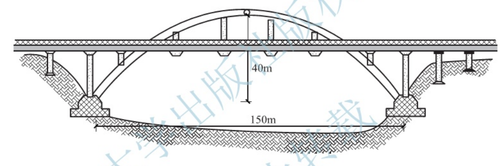


图 5.9

注：永定河七号铁路桥，1972 年投入使用，是我国最大跨度的钢筋混凝土拱桥

5.2 三铰拱的支座反力和内力的计算

当拱的两支座在同一水平线上时，这样的拱称为等高拱或平拱，否则称为斜拱。

现在以竖向荷载作用下的三铰拱为例，来说明三铰拱的支座反力和内力的计算。

1. 支座反力的计算

如图 5.10(a)所示的三铰拱，共有四个未知的支座反力，除以整体为隔离体建立的三个平衡方程外，还必须取左(或右)半拱为隔离体，以中间铰为矩心，建立一个平衡方程，从而求出所有的反力。

首先考虑整体的平衡，由$\sum M_A=0$及$\sum F_y=0$可求得两支座的竖向反力为

$$Y_A=\frac{F_1(l-a_1)+F_2(l-a_2)}{l}(\uparrow) \tag{a}$$

$$Y_B=\frac{F_1a_1+F_2a_2}{l}(\uparrow) \tag{b}$$

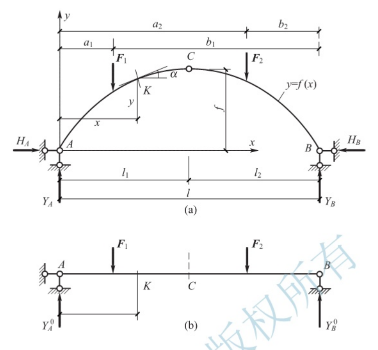


图 5.10

由$\sum F_x=0$，可得
$$H_A=H_B=H \tag{c}$$

然后，取左半拱为隔离体，由$\sum M_C=0$可得

$$H_A=\frac{Y_A l_1-F_1(l_1-a_1)}{f}=\frac{Y_A^0-F_1(l_1-a_1)}{f}=\frac{M_C^0}{f} \tag{d}$$

考察(a)和(b)的右边，可知其恰好等于相应简支梁［图 5.10(b)］的支座竖向力 Y_A^0 和 Y_B^0，而(d)右边的分子则等于相应简支梁上与拱的中间铰处对应的截面 C 的弯矩 M_C^0。因此可将(a)、(b)、(c)、(d)写为

$$\left.\begin{aligned} Y_A&=Y_A^0\\ Y_B&=Y_B^0\\ H&=\frac{M_C^0}{f}\end{aligned}\right\} \tag{5-1}$$

在竖向荷载作用下，三铰拱的支座反力有如下特点。

(1) 支座反力与拱轴线形状无关，而与三个铰的位置有关。

(2) 竖向支座反力与拱高无关。

(3) 当荷载和跨度固定时，拱的水平反力 H 与拱高 f 成反比，即拱高 f 越大，水平反力 H 越小；反之，拱高 f 越小，水平反力 H 越大。

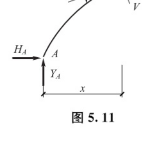
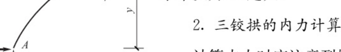



图 5.11

2. 三铰拱的内力计算

计算内力时应注意到拱轴为曲线这一特点，横截面应与拱轴正交，即与拱轴的切线相垂直，如图 5.10(a)所示的任一截面 K，由图 5.11 所示的隔离体可求得 K 截面的内力。

1）弯矩

$$M = Y_A x - F_1(x-a_1) - Hy = Y_A^0 x - F_1(x-a_1) - Hy$$
$$= M^0 - Hy \tag{5-2}$$

式中，M^0 为相应简支梁 K 截面的弯矩。

由式(5-2)可知，三铰拱截面中的弯矩比相应简支梁截面中的弯矩要小，这也是拱常用于较大跨度结构的原因。

2）剪力

任意截面 K 的剪力等于截面一侧所有外力在截面方向投影的代数和，即

$$V = Y_A\cos\alpha - F_1\cos\alpha - H\sin\alpha$$
$$= (Y_A^0 - F_1)\cos\alpha - H\sin\alpha$$
$$= V^0\cos\alpha - H\sin\alpha \tag{5-3}$$

式中，V^0 为相应简支梁 K 截面的剪力。

3）轴力

任意截面 K 的轴力等于截面一侧所有外力沿轴线在该处切线方向投影的代数和，即

$$N = Y_A\sin\alpha - F_1\sin\alpha + H\cos\alpha$$
$$= (Y_A^0 - F_1)\sin\alpha + H\cos\alpha$$
$$= V^0\sin\alpha + H\cos\alpha \tag{5-4}$$

拱截面轴力较大，且一般为压力。

注意：

（1）该组公式仅用于拱承受竖向荷载的情况；

（2）拱的左半跨 α 取正，右半跨 α 取负；

（3）剪力等于零处弯矩有极值；

（4）M 图、V 图、N 图均不再为直线；

（5）集中力作用处 V 图、N 图将发生突变，但突变值不等于集中力的大小；

（6）集中力偶作用处 M 图发生突变。

3. 三铰拱的内力图

（1）画三铰拱内力图的方法：描点法。

（2）画三铰拱内力图的步骤如下。

① 计算支座反力。

② 计算拱券截面的内力（可以每隔一定水平距离取一截面，也可以沿拱轴每隔一定长度取一截面）。

③ 按各截面内力的大小和正负绘制内力图。

【例 5-1】 三铰拱及其所受荷载如图 5.12 所示，拱的轴线为抛物线，方程为 $y=\frac{4f}{l^2}x(l-x)$。求支座反力，并绘制内力图。

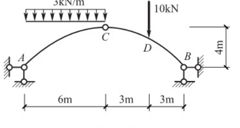


图 5.12

解：（1）支座反力的计算。

$$Y_A=Y_A^0=\frac{10\times3+3\times6\times9}{12}=16\text{kN}(\uparrow)$$

$$Y_B=Y_B^0=\frac{3\times6\times3+10\times9}{12}=12\text{kN}(\uparrow)$$

$$H=\frac{M_C^0}{f}=\frac{12\times6-10\times3}{4}=10.5\text{kN}$$

(2) 计算截面内力。求出支座反力后，可根据式(5-2)、式(5-3)、式(5-4)计算任意截面的内力。为了绘制内力图，将拱沿跨度方向分成 8 等份，算出每个截面的弯矩、剪力和轴力值。现以 $x=9\text{m}$ 截面 D 的内力为例，说明计算步骤。

截面几何参数：

$$x_D=9\text{m}$$

$$y_D=\frac{4f}{l^2}x(l-x)=\frac{4\times4}{12^2}\times9\times(12-9)=3\text{m}$$

$$\tan\varphi_D=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{4f}{l^2}(l-2x)=\frac{4\times4}{12^2}\times(12-2\times9)=-0.667$$

$$\varphi_D=-33.7^\circ\quad \sin\varphi_D=-0.555\quad \cos\varphi_D=0.832$$

$$M_D=M_D^0-Hy_D=12\times3-10.5\times3=4.5\text{kN}\cdot\text{m}$$

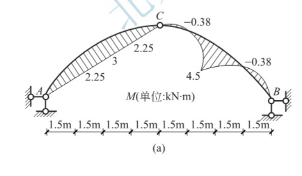
$$V_{D左}=V_{D左}^0\cos\varphi_D-H\sin\varphi_D=(-2)\times0.832-10.5\times(-0.555)=4.18\text{kN}$$

$$N_{D左}=V_{D左}^0\sin\varphi_D+H\cos\varphi_D=(-2)\times(-0.555)+10.5\times0.832=9.85\text{kN}$$

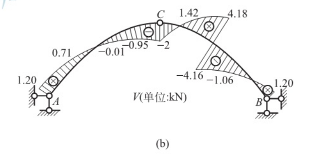
$$V_{D右}=V_{D右}^0\cos\varphi_D-H\sin\varphi_D=(-12)\times0.832-10.5\times(-0.555)=-4.16\text{kN}$$

$$N_{D右}=V_{D右}^0\sin\varphi_D+H\cos\varphi_D=(-12)\times(-0.555)+10.5\times0.832=15.40\text{kN}$$

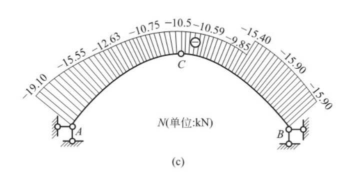
重复上述步骤，可求出各等分截面的内力，作出内力图如图 5.13(a)、(b)、(c)所示。



(a)



(b)



(c)

图 5.13

5.3 三铰拱的合理拱轴线

1. 合理拱轴线的概念

根据三铰拱截面的内力分析可知，三铰拱各截面的法向应力有由弯矩产生的不均匀分布的正应力和由轴力产生的均匀分布的正应力。为发挥材料的作用，应设法尽量减少截面上不均匀分布的正应力。如果使各截面的弯矩为零，只受轴力作用，正应力沿各截面都是均匀分布的，拱处于无弯矩状态，材料的使用是最经济的。在给定荷载作用下使拱处于无弯矩状态的拱轴线，称为拱的合理拱轴线或合理拱轴。

2. 合理拱轴线的确定

合理拱轴线可根据荷载作用下，任意截面弯矩为零的条件来确定。如在竖向荷载作用下三铰拱任一截面的弯矩为

$$M(x)=M^0(x)-Hy(x)$$

当拱的轴线为合理拱轴时，拱各截面的弯矩应为零，即

$$M(x)=0$$

$$M(x)=M^0(x)-Hy(x)=0$$

可得合理拱轴线方程为

$$y(x)=\frac{M^0(x)}{H} \tag{5-5}$$

其中 $M^0(x)$是与三铰拱跨度、荷载相等的简支梁的弯矩表达式，如用图形表示时，即为相应简支梁的弯矩图。在荷载、跨度、矢高给定时，H 是一个常数。所以合理拱轴线与相应的简支梁的弯矩图形状相似，对应竖标成比例，差一比例常数。在荷载、跨度给定时，合理拱轴线 $y(x)$随 f 的不同而有多条，不唯一。

【例 5-2】 设图 5.14(a)所示三铰拱承受沿水平方向均匀分布的竖向荷载 q 的作用，试求其合理轴线。

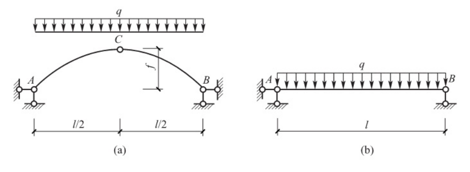


图 5.14

解： 由式(5-5)可知

$$y(x)=\frac{M^0(x)}{H}$$

相应简支梁如图 5.13(b)的弯矩方程为

$$M^0(x)=\frac{1}{2}qlx-\frac{1}{2}qx^2=\frac{qx}{2}(l-x)$$

拱的水平推力为

$$H=\frac{M_C^0}{f}=\frac{ql^2}{8f}$$

所以有

$$y(x)=\frac{\frac{qx}{2}(l-x)}{\frac{ql^2}{8f}}=\frac{4f}{l^2}x(l-x)$$

由此可知，三铰拱在沿水平方向均匀分布的竖向荷载作用下，其合理拱轴线为一抛物线。正因为如此，所以工程中拱的轴线常用抛物线。

可以验证三铰拱承受径向均匀水压力作用下，合理拱轴线为圆弧曲线，如图 5.15 所示。三铰拱在填土重力作用下，合理拱轴线是悬链线，如图 5.16 所示(γ 为填土的重力密度，拱所受的竖向分布荷载为 $q=q_C+\gamma y$)。

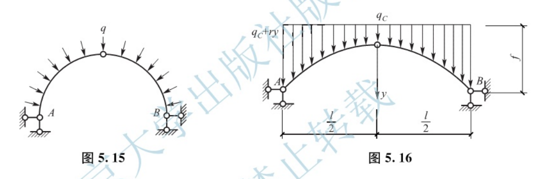


图 5.15　　　　图 5.16

在实际工程中，同一结构往往要受到各种不同荷载的作用，而对应不同的荷载就有不同的合理轴线。因此，根据某一固定荷载所确定的合理轴线并不能保证拱在各种荷载作用下都处于无弯矩状态。在设计中应当尽可能地使拱的受力状态接近无弯矩状态。通常以主要荷载作用下的合理轴线作为拱的轴线，这样，在一般荷载作用下拱仍会产生不大的弯矩。

本 章 小 结

本章讨论了三铰拱的计算。三铰拱是按三刚片规则组成的静定结构，其内力和反力可由静力平衡方程求出。三铰拱最明显的受力特征是在竖向荷载作用下，除产生竖向反力外还产生水平推力。

反力的计算公式为

$$Y_A=Y_A^0$$
$$Y_B=Y_B^0$$
$$H_A=H_B=H=\frac{M_C^0}{f}$$

竖向反力的大小与相应简支梁的竖向反力大小相同，水平推力则与三个铰的位置及荷

载有关。由于水平推力的存在，使拱的各个截面上的弯矩与相应简支梁相比减小很多。

拱的主要内力是轴向压力。求解三铰拱的内力主要是利用解析法，即通过确定指定截面的位置(坐标、方位)、取隔离体、列静力平衡方程，求出任一截面的内力。

本章还介绍了合理拱轴线的概念，对不同的荷载，会有相应的合理拱轴线。

关 键 术 语

拱(arch)；拱轴线(arch axis)；拱顶(vault)；拱高(arch height)；拱脚(arch toe)；水平推力(horizontal thrust)；拱式结构(arch structure)；推力结构(thrust structure)；三铰拱(three-hinged arch)；压力线(line of pressure)；合理拱轴线(optimal arch axis)。

习 题 5

一、思考题

1. 拱有哪几种形式?

2. 拱的受力有何特点？与梁和刚架有何异同?

3. 三铰拱屋架中为什么常加拉杆?

4. 在竖向荷载作用下，三铰拱的支座反力和相应简支梁的支座反力存在什么关系?

5. 三铰拱与简支梁比较，其优缺点是什么?

6. 什么是拱的合理拱轴?

二、填空题

1. 拱是杆轴线为______并且在竖向荷载作用下产生________的结构。

2. 在同样荷载作用下，三铰拱某截面上的弯矩值比相应简支梁对应截面的弯矩值要小，这是因为三铰拱有________。

3. 图5.17所示半圆三铰拱，$\alpha=30°$，$Y_A=qa$(↑)，$H_A=\frac{qa}{2}$(→)，K截面的$\varphi_K=$________，$V_K=$________，V_K的计算式为________。

4. 图5.18所示抛物线三铰拱的$y_K=3.34$m，截面K的弯矩$M_K=$__________，______侧受拉。

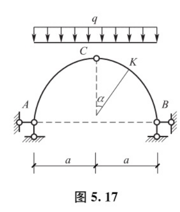


图5.17

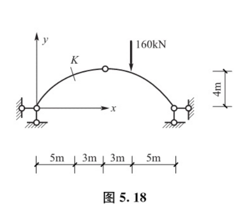


图5.18

5. 三铰拱合理拱轴线的形状与____________有关 。

6. 在已知荷载作用下，使三铰拱处于________状态的轴线叫做三铰拱的合理拱轴线，合理拱轴线的拱各截面只受____作用，即正应力沿截面________分布。

三、判断题

1. 三铰拱的弯矩小于相应简支梁的弯矩是因为存在水平支座反力。(　　)

2. 三铰拱的水平推力只与三个铰的位置及荷载大小有关，而与拱轴线形状无关。(　　)

3. 三铰拱的内力不但与荷载及三个铰的位置有关，而且与拱轴线形状有关。(　　)

4. 在相同跨度及竖向荷载作用下，拱脚等高的三铰拱，其水平推力随矢高的减小而减小。(　　)

5. 图 5.19 所示拱的水平推力 $H=\frac{3ql}{4}$。(　　)

6. 图 5.20 所示三铰拱左支座的竖向反力为零。(　　)

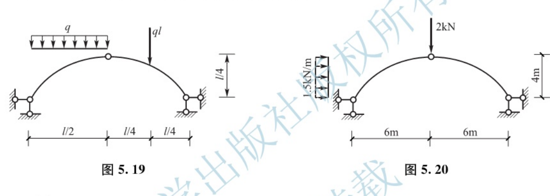


图 5.19　　　　**图 5.20**

四、选择题

1. 在确定的竖向荷载作用下，三铰拱的水平反力仅与下列因素有关：(　　)。

A. 拱跨　　　　B. 拱的矢高

C. 三个铰的相对位置　　　　D. 拱的轴线形式

2. 在竖向荷载作用下，不产生水平推力的静定结构是(　　)。

A. 多跨静定梁　　　　B. 三铰刚架

C. 三铰拱　　　　D. 拱式桁架

3. 图 5.21 所示三铰拱结构截面 K 的弯矩为(　　)。

A. $\frac{ql^2}{2}$　　　　B. $\frac{3ql^2}{8}$

C. $\frac{7ql^2}{8}$　　　　D. $\frac{ql^2}{8}$

4. 图 5.22 所示半圆弧三铰拱，半径为 r，$\theta=60°$，截面 K 的弯矩为(　　)。

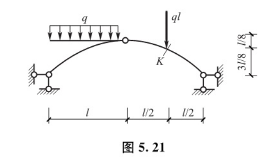


图 5.21

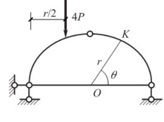


图 5.22

A. $\frac{\sqrt{3}Pr}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}Pr}{2}$

C. $\frac{(1-\sqrt{3})Pr}{2}$　　D. $\frac{(1+\sqrt{3})Pr}{2}$

5. 图 5.23 所示拱结构截面 D 的弯矩(拱内侧受拉为正)是(　　)。

A. 6kN・m　　B. −6kN・m

C. −3kN・m　　D. 3kN・m

6. 如图 5.24 所示的三铰拱，支座 A 的水平反力(以向右为正)是(　　)kN。

A. 1/2　　B. 1

C. 2　　D. 3

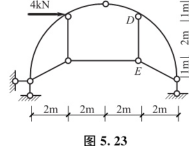


图 5.23

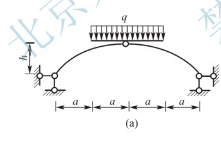
图 5.24

7. 具有“合理拱轴”的静定拱结构的内力为(　　)。

A. $M=0$，$V\neq0$，$N\neq0$　　B. $M\neq0$，$V=0$，$N\neq0$

C. $M=0$，$V=0$，$N\neq0$　　D. $M\neq0$，$V\neq0$，$N\neq0$

8. 图 5.25(a)、(b)所示三铰拱的支座(　　)。



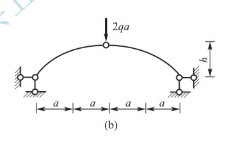


图 5.25

A. 竖向反力相同，水平反力不同

B. 竖向反力不同，水平反力相同

C. 竖向反力相同，水平反力相同

D. 竖向反力不同，水平反力不同

五、计算题

1. 图 5.26 所示抛物线三铰拱，已知拱轴线方程为 $y=\frac{4f}{l^2}x(l-x)$，$l=16\text{m}$，$f=4\text{m}$，试求：(1)支座反力；(2)截面 D 和 E 的 M、V、N。

2. 对图 5.26 所示的三铰拱：(1)如果改变拱高($f=8\text{m}$)，支座反力和弯矩有何变化?

(2)如果拱高和跨度同时改变($l=32$m，$f=8$m)，但高跨比$\frac{f}{l}$保持不变，则支座反力和弯矩又有何变化?

3. 图5.27所示圆弧三铰拱，求支座反力及D截面的M、V、N。

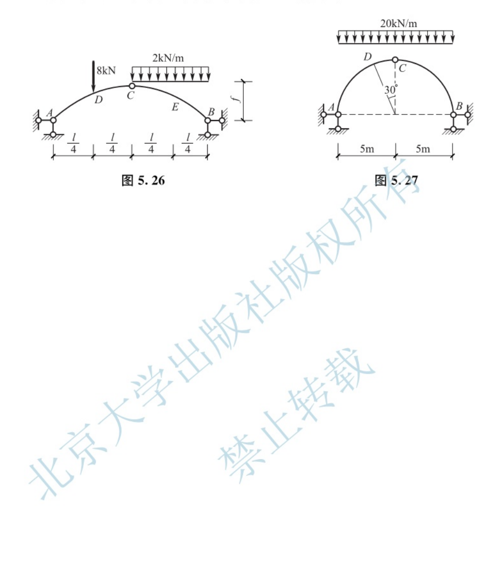


图5.26　　图5.27

第6章 静定平面桁架和组合结构

本章教学要点

知识模块	掌握程度	知识要点
静定平面桁架的计算	熟悉	桁架的特点和分类
	掌握	桁架中杆的内力计算方法和零杆的判断
	理解	组合结构

本章技能要点

技能要点	掌握程度	应用方向
桁架中杆的内力计算	掌握	桁架结构设计



导入案例

埃菲尔建造的桥梁

1889年法国巴黎世界博览会建造的埃菲尔铁塔是法国结构工程师埃菲尔名扬全世界的建筑。其实，埃菲尔更多的功绩是表现在桥梁工程方面。

1860年，艾菲尔完成了当时法国著名的波尔多大桥工程，将长达500m的钢铁构件架设在跨越吉隆河中的6个桥墩上。这项巨大工程的完成，使艾菲尔在工程界的名声大振。

1869年，他完成了法国南部四座巨大的桥梁建筑，其中有最著名的索尔河高架桥，该桥是用两座高达59m的铁塔支撑着整个桥梁结构的钢铁大桥。

1876年法国为庆祝美国独立100周年赠送的自由女神像的钢桁架也是埃菲尔设计的。

可是，由于种种原因，艾菲尔设计的一座架设在莱茵河支流比尔斯河上的单轨铁桥在1891年5月14日发生了坠毁，在12节车厢的旅客列车上，74人遇难，200多人受伤。

该桥位于瑞士的巴塞尔城东4.4km、距明汉斯太因车站400m处。这是一座长42m、高6m、宽4.6m的单跨桥，其结构的立面和平面图见图6.1。投入使用期间曾因各种灾害多次维修过。事故发生前不久，考虑机车和列车自重增加，还对该桥的强度重新进行了分析。经计算，构件的最大应力不超过66.6MPa，而荷载也未超出原设计值。通过试验表明该桥梁桁架可承受一般荷载，为保险起见，还是对该桥做了局部加强。

大桥的破坏是发生在白天。由巴塞尔开过来的列车，当车头开到桥中央时，车头连车厢就冲向了河里(图6.2)。

瑞士政府责成结构力学教授和实验专家对事故进行分析：当列车行驶到桥跨中央时，桁架中间斜杆

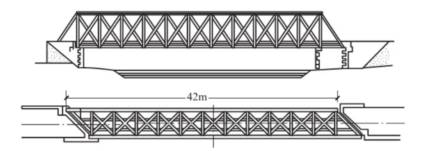


图 6.1

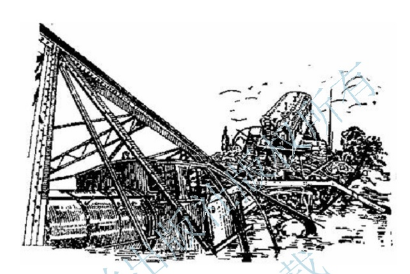


图 6.2

的压应力为最大，工作压应力达到 66.3MPa，而压杆失稳的临界应力仅为 52MPa，超载 27.5%。该杆件退出工作后，其他杆件的应力增大相继退出工作，最后整个桁架成为几何可变体。

同样的事故在美国的阿什特比拉河大桥就发生过。该桥是双轨路面、跨长 37m 的单跨桁架铁路桥，建于 1865 年。1876 年 12 月 29 日晚 8 时许，一列由两辆机车和 11 节车厢组成的列车通过这座桥梁，当第一辆机车行驶到距离对岸大约 15m 远时，司机感到列车在向后拽，于是他加足了马力，用力开上了对岸，行驶了 45m 停下来，回头一看，什么都不见了。由于大桥断裂，后面的机车和车厢从 21m 高的桥面坠入河中，158 名乘客中有 92 人遇难。经调查，破坏原因是多方面的，比如：没有对大桥进行严格的验收，施工时出现过多处差错，结构设计也不合理等。

本章研究的主要内容就是对桁架结构进行内力分析，防止桁架结构由于杆件设计不合理而发生破坏。

6.1 静定平面桁架

1. 静定平面桁架

桁架是由若干直杆在两端铰接组成的结构。桁架可分为平面桁架和空间桁架。无多余约束的为静定桁架，有多余约束的为超静定桁架。

桁架在工程实际中得到广泛的应用，但是，结构力学中的桁架与实际桁架有差别，主要进行了以下三点假设：

(1) 所有结点都是无摩擦的理想铰；

(2) 各杆的轴线都是直线并通过铰的中心；

(3) 荷载和支座反力都作用在结点上。

符合上述假定的桁架称为理想桁架。理想桁架中的各杆都是二力杆，各杆只承受轴力。在实际工程中，对于在结点荷载作用下的各杆主要承受轴力的结构，经常采用理想桁架作为其计算简图。在桁架结构中，由于杆件主要承受轴力，杆工作应力分布均匀，能够充分利用材料，与梁相比，用料省、自重轻，因此，在实际工程中得到广泛的应用。如图 6.3 是人民大会堂的屋架计算简图，图 6.4 是福斯湾悬臂钢桁架桥，图 6.5 是武汉长江大桥(桥梁类型是钢桁架三孔连续梁)，图 6.6 是木桁架屋架施工现场。

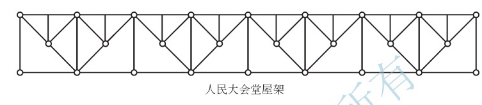


图 6.3

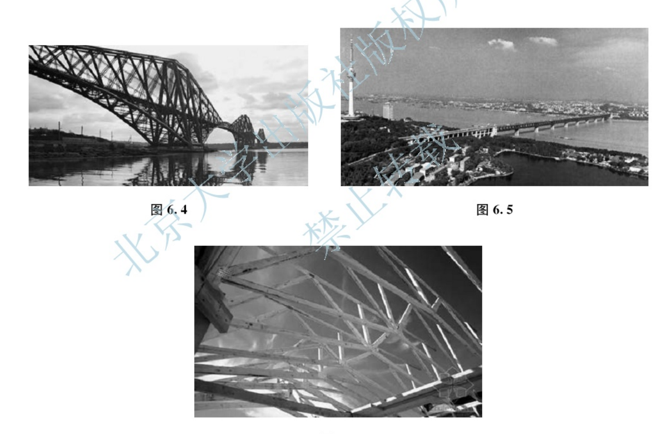


图 6.4

图 6.5

图 6.6

应当注意，实际工程中的桁架与上述理想桁架有一定的区别，主要表现在以下几方面。

1) 杆的连接方式有差异

在钢结构中，结点通常是铆接或焊接；在钢筋混凝土结构中，各杆端通常是整体浇注在一起的；在木结构中，各杆通常是榫接或螺栓连接。

2) 杆的几何性质有差异

实际工程中的直杆无法绝对平直，结点上各杆的轴线也不一定完全交于一点。

3）结构上的荷载有差异

实际工程中桁架必然有自重，即使荷载是作用在结点上，在自重的作用下，各杆必然发生弯曲变形，产生弯曲应力，并不像理想桁架那样只有均匀分布的轴力。

2. 桁架中各部分的名称

桁架的杆件，按其所在位置的不同，可分为弦杆和腹杆两大类，如图 6.7 所示，弦杆是指桁架上、下外围的杆件，可分为上弦杆和下弦杆；腹杆是在上、下弦杆之间的杆件，可分为竖杆和斜杆，弦杆上两相邻结点之间的区间称为节间。

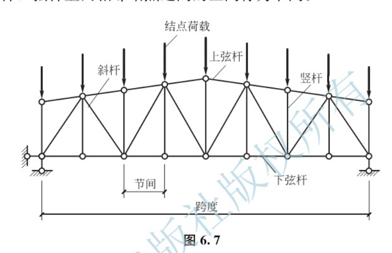
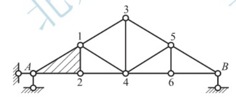


图 6.7

3. 静定平面桁架的分类

按几何组成分类，可分为以下 3 类。

（1）简单桁架：由一个基本铰接三角形开始，逐次增加二元体所组成的几何不变体。如图 6.8 所示的两个桁架。



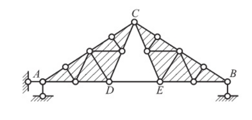


图 6.8

（2）联合桁架：由几个简单桁架，按两刚片法则或三刚片法则所组成的几何不变体。如图 6.9 所示的两个桁架。

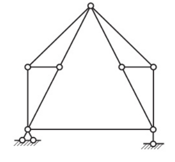


图 6.9

(3) 复杂桁架：不属于前两种的桁架。如图 6.10 所示的两个桁架。

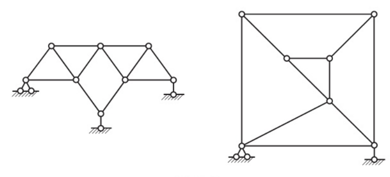


图 6.10

6.2 桁架内力计算的方法

桁架中杆的内力计算方法有：结点法、截面法、联合法。

1. 结点法

结点法：截取桁架的一个结点为隔离体计算桁架内力的方法。

结点上的荷载、反力和杆件内力作用线都汇交于一点，组成了平面汇交力系，因此，结点法是利用平面汇交力系求解内力的。

利用结点法求解桁架，主要是利用汇交力系求解，每一个结点只能求解两根杆件的内力，因此，结点法最适用于计算简单桁架。

分析时，各个杆件的内力一般先假设为受拉，当计算结果为正时，说明杆件受拉；为负时，杆件受压。

【例 6-1】 用结点法计算图 6.11 所示桁架各杆的内力。

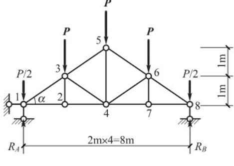


图 6.11

解：(1) 求支座反力。

$$R_A=R_B=2P(\uparrow)$$

(2) 计算各杆的内力。

由于该结构几何形状、荷载、约束反力都对称，则内力也对称，所以只需计算对称轴一侧的内力即可。现计算左半部分。

结点 1 [图 6.12(a)]：

$$\sum Y=0,\quad N_{13}\sin\alpha-\frac{P}{2}+2P=0,\quad \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad N_{13}=-\frac{3\sqrt{5}}{2}P(\text{压})$$

$$\sum X=0,\quad N_{13}\cos\alpha+N_{12}=0,\quad \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\quad N_{12}=3P(\text{拉})$$

结点 2 [图 6.12(b)]：

$$N_{21}=N_{12}=3P(\text{拉})$$

$$\sum X=0,\quad N_{25}-N_{21}=0,\quad N_{25}=N_{21}=3P(\text{拉})$$

$$\sum Y=0,\quad N_{23}=0$$

结点 3［图 6.12(c)］：

$$\sum Y=0,\quad -N_{35}\sin 2\alpha-P\cos\alpha=0,\quad N_{35}=-\frac{\sqrt{5}}{2}P(\text{压})$$

$$\sum X=0,\quad N_{34}+N_{13}-P\sin\alpha+N_{35}\cos 2\alpha=0,\quad N_{34}=-\sqrt{5}P(\text{压})$$

结点 4［图 6.12(d)］：

$$\sum Y=0,\quad -N_{45}-P+2N_{43}\sin\alpha=0,\quad N_{45}=P(\text{拉})$$

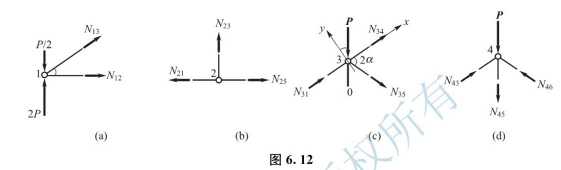


图 6.12

通过上题我们发现，桁架中有时会出现内力是零的杆(称为零杆)。如果在计算之前，能预先判断出零杆，会给计算带来很多的方便。在以下情况会出现零杆：

(1) 不共线的两杆相连且结点上无荷载作用时，则这两个杆都为零杆，见图 6.13(a)；

(2) 当两杆结点上作用荷载且荷载沿其中一杆的方向，则该杆轴力大小与荷载相等，另外一杆的轴力为零，见图 6.13(b)；

(3) 三杆相连接的结点，有两杆共线，当结点上无荷载作用时，则不共线那个杆的轴力为零，而共线的两杆的轴力大小相等、性质相同，见图 6.13(c)。

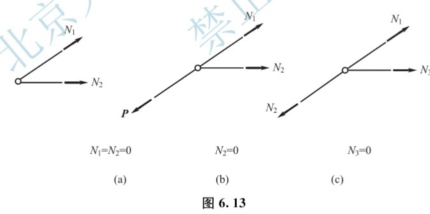


图 6.13

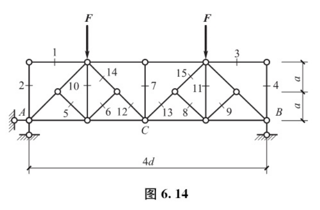


图 6.14

零杆指杆件轴力为零的杆件，虽不受轴力，但不能理解成多余的杆件。

【例 6-2】 判断图 6.14 所示桁架的零杆。

解： 杆 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15 都是零杆。

结点 C 处于对称轴上，处于对称位置的 12 杆和 13 杆的内力应相等，即 $N_{12}=N_{13}$，又因 $N_7=0$，由 $\sum Y=0$，$Y_{12}+Y_{13}=0$，

$Y_{12}=-Y_{13}$，与 $N_{12}=N_{13}$ 矛盾，所以 $N_{12}=N_{13}=0$。

2. 截面法

截面法：用适当的截面，截取桁架的一部分(至少包括两个结点)为隔离体，利用平面任意力系的平衡条件进行求解。

截面法适合于求解指定杆件的内力，尤其是联合桁架中连接杆的轴力。隔离体上的未知力一般不超过三个。在计算时，轴力也一般假设为拉力。

为避免求解联立方程，要注意选择平衡方程，一般使每一个平衡方程包含一个未知力。

【例 6-3】 求图 6.15(a)所示桁架中 1、2、3 杆的轴力。

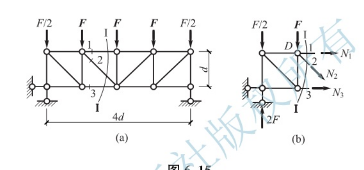


图 6.15

解：(1) 求支座反力。

(2) 求各杆轴力。

取Ⅰ—Ⅰ截面左边为研究对象，受力如图 6.15(b)所示。

$$\sum m_D=0,\quad N_3\times d-\left(2F-\frac{F}{2}\right)\times d=0,\quad N_3=\frac{3}{2}F(\text{拉})$$

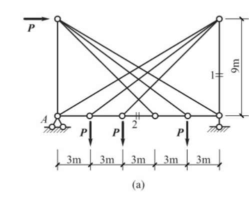
$$\sum Y=0,\quad 2F-\frac{F}{2}-F-N_2\cos 45^\circ=0,\quad N_2=\frac{\sqrt{2}}{2}F(\text{拉})$$

$$\sum X=0,\quad N_1+N_3+N_2\cos 45^\circ=0,\quad N_2=-2F(\text{压})$$

【例 6-4】 求图 6.16(a)所示桁架杆 1、2 的内力 N_1、N_2。

解：计算支座反力：　　$X_A=P(\leftarrow)$，$Y_A=P(\uparrow)$

这是联合桁架，切断三根联系杆，取隔离体如图 6.16(b)所示。



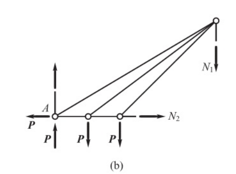


图 6.16

$$\sum M_A=0,\quad 15N_1+3P+6P=0,\quad N_1=-0.6P(\text{压})$$
$$\sum X=0,\quad N_2=P$$

在截面法的应用中，会有下述的特殊情况：

一般来说，用截面法截断不超过三根不交于一点也不互相平行的杆件时，可以直接利用三个平衡方程求出三根杆件的轴力。但在某些特殊情况下，截断的杆数大于三根，但除一根以外，其余各杆都交于一点(或都互相平行)，则这一根不与其他杆件相交(或与其他杆件平行)的杆件的轴力，仍可利用力矩平衡方程(或投影平衡方程)求得。

如图 6.17(a)所示，若求桁架中 1 杆的轴力，则取 n—n 截面左边为研究对象，受力如图 6.17(b)，则对 C 点列力矩方程可求出杆 1 轴力。

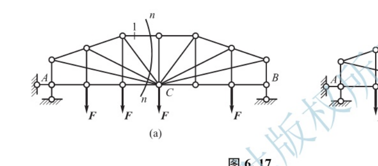


图 6.17

如图 6.18 所示，当所取 n—n 截面截断三根以上的杆件，除了杆 1 外，其余各杆均互相平行，则由投影方程可求出杆 1 轴力。取 n—n 截面以上为隔离体，列出水平方向上的投影方程就可求出 1 杆的轴力。

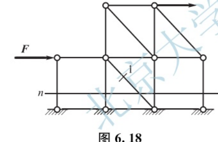
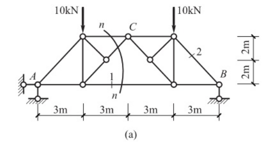


图 6.18

3. 联合法

在解决一些复杂的桁架时，单应用结点法或截面法往往不能够求解结构的内力或比较烦琐，这时需要将这两种方法联合应用，从而进行解题，解题的关键是从几何构造分析。

【例 6-5】 求图 6.19(a)所示桁架中 1、2 杆的轴力 N_1、N_2。



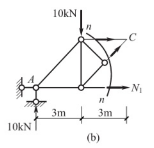


图 6.19

解：(1) 求支座反力。

(2) 取 n—n 截面左边为研究对象，受力如图 6.19(b)所示。

$$\sum m_C=0,\quad N_1\times4+10\times3-10\times6=0,\quad N_1=7.5\text{kN}(\text{拉})$$

(3) 以结点 B 为研究对象(受力图略)，可求出 2 杆的内力 $N_2=-12.5\text{kN}(\text{压})$。

6.3 静定组合结构

1. 组合结构的受力特点

组合结构是由受弯构件(梁式杆)与受拉压杆件组合而成的。组合结构多用于工业与民用建筑中的屋架结构、吊车梁及桥梁中的承重结构。

图6.20所示为下撑式五角形屋架及其计算简图，上弦杆为梁式杆，由钢筋混凝土制成；下弦杆和腹杆为链杆，由型钢制成。

图6.21所示为一门式组合结构，柱子是梁式杆，屋架则由链杆组成。

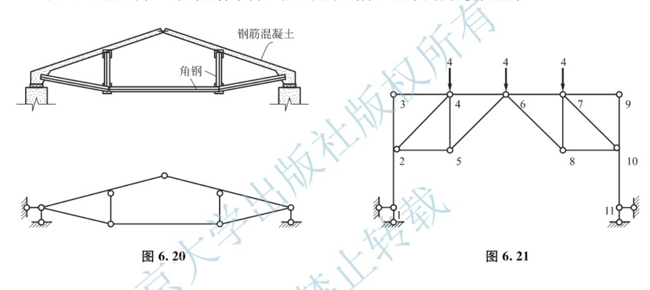


图6.20　　图6.21

2. 组合结构的计算

计算组合结构时，应先根据其几何组成来确定计算的顺序，依次求各部分的约束力，然后再求内力。求内力时，一般先求各链杆的内力，再求各梁式杆的内力，绘制内力图。

【例6-6】 试作出图6.22(a)所示组合结构的内力图。

解： 该结构AC、BC杆为梁式杆，其余各杆均为二力杆。

(1) 求支座反力。

$$X_A=0,\quad Y_A=6\text{kN}(\uparrow),\quad Y_B=6\text{kN}(\uparrow)$$

(2) 计算各链杆内力。

作截面$n—n$，截断铰C和链杆DE，隔离体见图6.22(b)。

$$\sum M_C=0,\quad 6\times6-1\times6\times3-N_{DE}\times3=0$$

$$N_{DE}=6\text{kN}(拉)$$

再由D结点的平衡，可得

$$N_{DA}=6\times\sqrt{2}=8.48\text{kN}(拉)$$

$$N_{DF}=-6\text{kN}(压)$$

(3) 计算梁式杆内力。

取 AFC 为隔离体，受力图如图 6.22 (c)所示，由此可求出 AFC 各截面上的内力。再根据对称性可作出内力图，如图 6.22 (d) 、(e)、(f)所示。

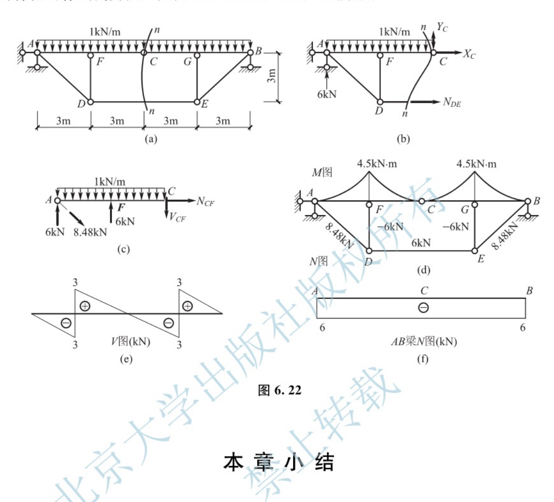


图 6.22

本 章 小 结

本章首先讨论了平面静定桁架的组成和分类：①桁架是只受结点荷载的直杆铰结体系；②桁架各杆件内力只有轴力(受拉或受压的二力杆)；③桁架按几何组成可分为简单桁架、联合桁架、复杂桁架。

介绍了静定平面桁架内力计算的两个主要方法：结点法与截面法。具体步骤是：作几何组成分析、求支座反力、判定零杆、应用结点法和截面法进行内力分析。

若桁架对称，计算过程中可考虑对称性的利用。应用截面法时，若截面的未知力超过三个，当仅有一个未知力与其他未知力不平行时可采用投影方程求出该力；当仅有一个未知力与其他未知力不汇交时可采用力矩方程求出该力。

本章还介绍了组合结构的内力计算，计算过程中，要注意区分桁架结点和桁架杆与梁式杆连接结点的不同之处。

关 键 术 语

杆件(bar)；铰结点(hinge joint)；桁架(truss)；平面桁架(plane truss)；节间(inter-

val)；弦杆(chord member)；上弦杆(upper chord member)；下弦杆(lower chord member)；腹杆(web member)；竖杆(vertical member)；斜杆(skew bar)；简单桁架(simple truss)；联合桁架(joint truss)；复杂桁架(complex truss)结点法(joint method)；零杆(member without force)；截面法(section method)；组合结构(composite structure)。

习　题　6

一、思考题

1. 理想桁架的基本假设是什么？
2. 桁架和梁相比较有何优点？
3. 桁架按几何组成可分为哪几类？
4. 桁架中杆内力的计算方法有哪几种？
5. 怎样利用联合桁架的组成特点来进行计算？
6. 怎样判断零杆？
7. 零杆既然不受力，为什么在实际结构中不把它去掉？
8. 什么是组合结构？怎样判断组合结构中的杆是二力杆还是梁式杆？
9. 组合结构的计算方法和步骤是怎样的？

二、填空题

1. 由一个基本铰结三角形依次增加二元体而组成的桁架称为____________，由几个简单桁架按几何不变体系的组成规则组成的桁架称为____________，按上述两种方式以外组成的其他静定桁架称为____________。

2. 对桁架进行内力分析时，若所取隔离体只包含一个结点，称为__________法；若所取隔离体包含两个或两个以上的结点，则称为____________法。

3. 组合结构是指由链杆和受弯杆件____________的结构，其中链杆只有______，受弯杆件同时有________和________以及剪力。

4. 图 6.23 所示桁架中杆 1 和杆 2 的轴力 N_1 =__________，N_2 =__________。

5. 图 6.24 所示桁架中杆 1 和杆 2 的轴力 N_1 =________，N_2 =____________。

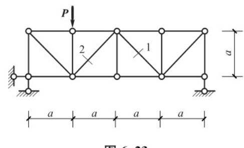


图 6.23

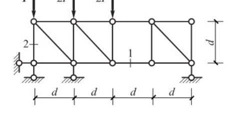
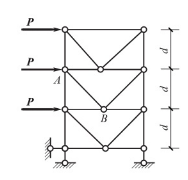


图 6.24

6. 图 6.25 所示两桁架中斜杆 AB 的内力 N_{AB}，其大小________，性质________。

7. 图 6.26 所示桁架中内力为零的杆件有________根，并标示在零杆上。

8. 图 6.27 所示结构中内力为零的杆件有________根，并标示在零杆上。



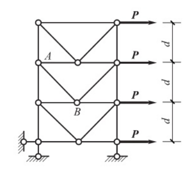


图 6.25

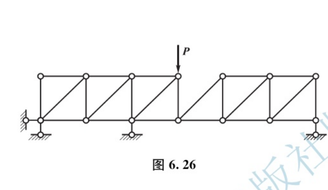


图 6.26

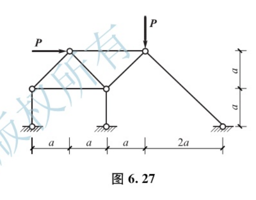


图 6.27

三、判断题

1. 因为零杆的轴力为零，故该杆从该静定结构中去掉，不影响结构的功能。(　　)
2. 图 6.28 所示对称桁架中杆 1～6 的轴力等于零。(　　)
3. 图 6.29 所示桁架中，有 $N_1=N_2=N_3=0$。(　　)

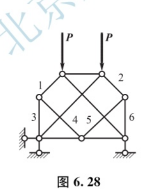


图 6.28

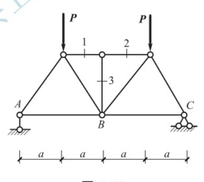


图 6.29

4. 图 6.30 所示桁架中，连接 E 结点的三根杆件的内力均为零。(　　)
5. 图 6.31 所示桁架杆件 AB、AF、AG 内力都不为零。(　　)
6. 采用组合结构可以减少梁式杆件的弯矩，充分发挥材料强度，节省材料。(　　)
7. 组合结构中，链杆(桁式杆)的内力是轴力，梁式杆的内力只有弯矩和剪力。(　　)
8. 图 6.32 所示结构中，支座反力为已知值，则由结点 D 的平衡条件即可求得 F_{NCD}。(　　)
9. 图 6.33 所示结构中杆 1 的轴力 $N_1=0$。(　　)

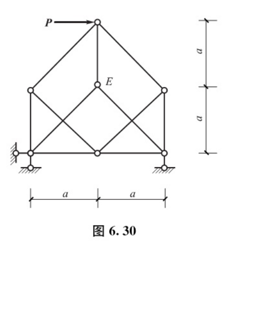


图 6.30

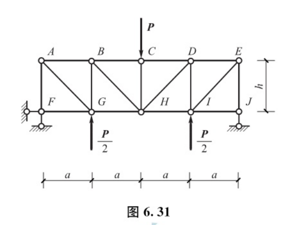


图 6.31

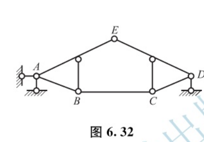


图 6.32

图 6.33

四、选择题

1. 图 6.34 所示桁架中，当仅增大桁架高度，其他条件均不变时，杆 1 和杆 2 的内力变化是(　　)。

A. N_1、N_2均减小　　B. N_1、N_2均不变

C. N_1减小、N_2不变　　D. N_1增大、N_2不变

2. 图 6.35 所示桁架中 1、2 杆内力值为(　　)。

A. $N_1=N_2=0$　　B. $N_1<0$、$N_2<0$

C. $N_1=-N_2$　　D. $N_1>0$、$N_2>0$

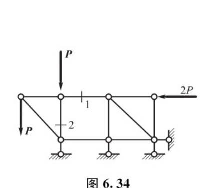


图 6.34

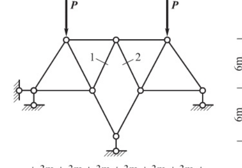


图 6.35

3. 图 6.36 所示桁架中 1、2、3、4 杆内力值为(　　)。

A. $N_1=N_2=0$，$N_3=N_4$不等于 0

B. $N_1=N_2$不等于 0，$N_3=N_4=0$

C. $N_1=N_2$不等于 0，$N_3=N_4$不等于 0

D. $N_1=N_2=N_3=N_4=0$

4. 图 6.37 所示结构当高度增加时，杆 1 的内力(　　)。

A. 增大　　B. 不变

C. 不确定　　D. 减小

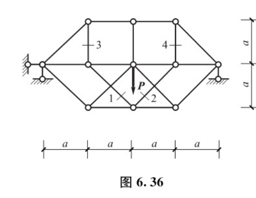


图 6.36

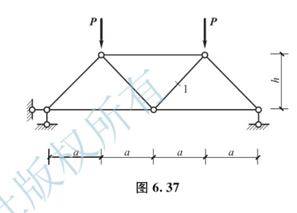
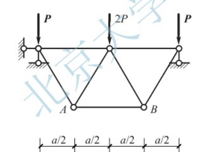


图 6.37

5. 图 6.38 所示两桁架中杆 AB 的内力分别记为 N_1 和 N_2，则两内力有(　　)。

A. $N_1>N_2$　　B. $N_1<N_2$

C. $N_1=N_2$　　D. $N_1=-N_2$



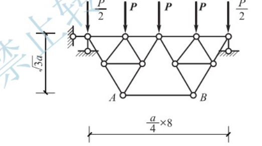


图 6.38

6. 图 6.39 所示桁架结构中，杆 1 的轴力为(　　)。

A. $-P$　　B. $-1.414P$

C. $-2.732P$　　D. $-1.732P$

7. 图 6.40 所示桁架中杆 1 的轴力为(　　)。

A. 0　　B. $-\sqrt{2}P$

C. $\sqrt{2}P/2$　　D. $\sqrt{2}P$

8. 图 6.41 所示结构中，当荷载及 h 保持不变而 h_1 增大、h_2 减小时，链杆 DE 与 DF 内力绝对值的变化为(　　)。

A. N_{DE}不变，$|N_{DE}|$增大　　B. N_{DE}增大，$|N_{DE}|$增大

C. N_{DE}不变，$|N_{DE}|$减小　　D. N_{DE}减小，$|N_{DE}|$不变

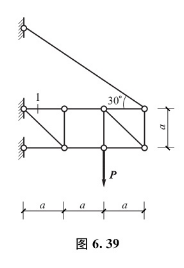


图 6.39

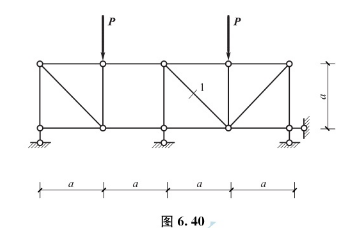


图 6.40

9. 如图 6.42 所示的桁架中，FH 杆的轴力为________。

A. $-\frac{3\sqrt{2}P}{4}$　　B. $\frac{3\sqrt{2}P}{2}$　　C. $-\frac{5\sqrt{2}P}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{2}P}{8}$

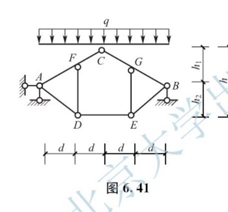


图 6.41

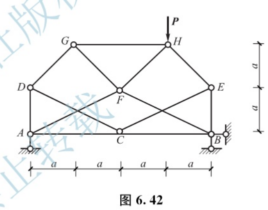


图 6.42

10. 图 6.43 所示结构中杆 1 的轴力为(　　)。

A. $-ql/2$　　B. 0　　C. $-ql$　　D. $-2ql$

11. 图 6.44 所示结构中 B 支座反力 F_B 为(　　)。

A. P　　B. $P/2$　　C. $P/3$　　D. $2P$

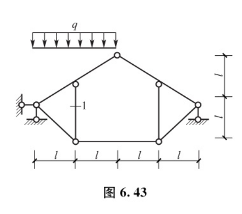


图 6.43

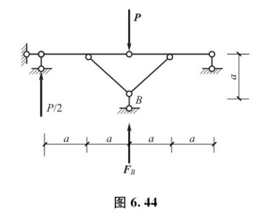


图 6.44

12. 图 6.45 所示桁架杆 a 的内力是(　　)。

A. $-3F$　　　B. $-2F$　　　C. $2F$　　　D. $3F$

13. 图 6.46 所示桁架中杆 c 的内力是(　　)。

A. $-F/2$　　　B. 0　　　C. $F/2$　　　D. F

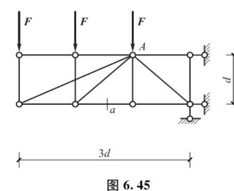


图 6.45

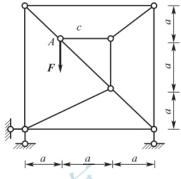


图 6.46

14. 图 6.47 所示桁架中杆 BE 的内力 N_{BE} 为(　　)。

A. F　　　B. $-F$　　　C. $\sqrt{2}F$　　　D. $-\sqrt{2}F$

15. 不经计算，通过直接判定得知图 6.48 所示桁架中零杆的数目为(　　)根。

A. 4　　　B. 5　　　C. 6　　　D. 7



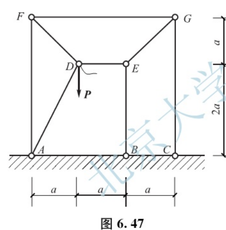


图 6.47

图 6.48

16. 如图 6.49 所示，结构 CD 杆的内力是(　　)。

A. $-F/2$　　　B. 0　　　C. $F/2$　　　D. F

17. 如图 6.50 所示的桁架中，GF 和 DC 杆的轴力分别为(　　)。

A. $-F$，$-F/2$　　　B. $-F/2$，0　　　C. $F/2$，0　　　D. F，$F/2$

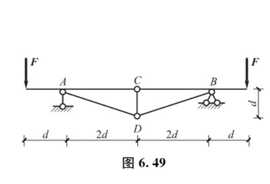


图 6.49

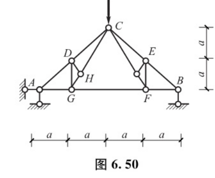


图 6.50

18. 如图 6.51 所示，桁架杆①、②的内力分别为(　　)。

A. $\sqrt{2}P$，$\frac{\sqrt{2}}{3}P$　　B. $-\sqrt{2}P$，$-\frac{\sqrt{2}}{3}P$

C. $-\frac{\sqrt{2}}{3}P$，$-\frac{\sqrt{2}}{3}P$　　D. $-\frac{\sqrt{2}}{3}P$，$\frac{\sqrt{2}}{3}P$

19. 图 6.52 所示结构中杆 1 的轴力一定为(　　)。

A. 0　　B. $2F_P$(拉力)

C. $0.5F_P$(压力)　　D. $0.5F_P$(拉力)

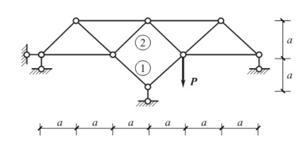


图 6.51

图 6.52

20. 图 6.53 所示结构中杆①的轴力为(　　)。

A. $-P$　　B. $-0.5P$

C. 0　　D. P

21. 图 6.54 所示结构杆中 CF 的轴力为(　　)。

A. $2P$(拉)　　B. $P/3$(拉)　　C. $4P$(拉)　　D. $4P$(压)

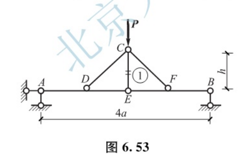


图 6.53

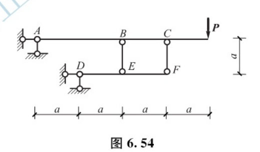
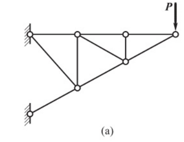


图 6.54

五、计算分析题

1. 试分析图 6.55 所示桁架的类型，找出零杆。



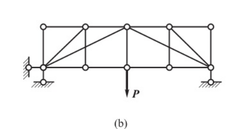


图 6.55

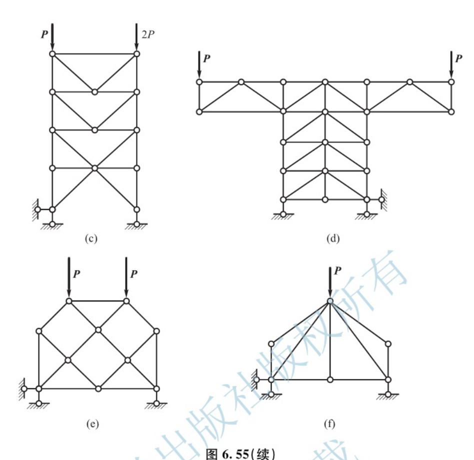


图 6.55(续)

2. 用结点法求图 6.56 所示桁架各杆的轴力。

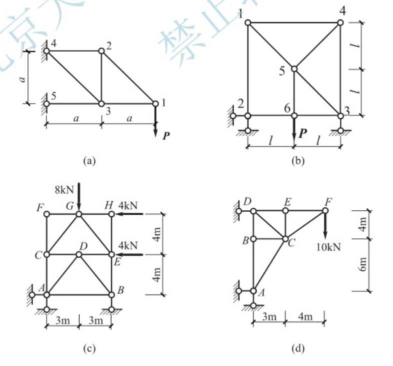


图 6.56

3. 用截面法求图 6.57 所示桁架指定杆的轴力。

(a)　(b)　(c)　(d)　(e)　(f)

图 6.57

4. 选用较简捷的方法计算图 6.58 所示桁架中指定杆的轴力。

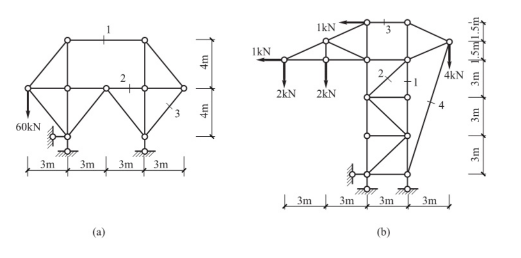


图 6.58

5. 试做出图 6.59 所示组合结构的内力图。

(a)

(b)

图 6.59

第7章 结构的位移计算

本章教学要点

知识模块	掌握程度	知识要点
静定结构的位移计算	掌握	广义位移的概念、实功与虚功的概念、变形体系的虚功原理
	掌握	单位荷载法计算位移
	掌握	图乘法计算梁和刚架的位移
	掌握	支座移动及温度改变引起的位移计算方法
功的原理	了解	互等定理

本章技能要点

技能要点	掌握程度	应用方向
图乘法计算梁和刚架的位移	掌握	刚度校核、超静定结构的计算
互等定理的应用	了解	力法方程、位移法方程的建立



导入案例

“鸟巢”站起来了

结构建造过程中，需要对搭建的杆件设置临时支撑点，当各个构件组装成结构后，再撤去临时支撑，原支撑上所负担的荷载将转移到结构上，这个过程就是结构的卸载(对于临时支撑是卸掉荷载，以便于将其拆除；对于结构是增加了荷载)。

2006年9月18日，随着建筑工人在“鸟巢”的顶端取下了最后一块钢垫块，历时4天的国家体育场钢结构卸载顺利完成。此次卸载的钢结构总质量达到14000t，共有78个卸载点，安装了156个千斤顶，采取分级同步卸载的方法。鸟巢由被外力支撑的状态(图7.1为正在搭建过程中)变成完全靠自身结构支撑而站立起来了(图7.2)。

结构在卸载过程中，支撑点的转移会使结构产生很大的位移。“鸟巢”卸载成功后，整个钢结构在独立承重的状态下，出现了不同程度的下沉，最大下沉距离达到了27.1cm(比设计规定值少1.5cm，完全符合设计要求)。显然，若在设置临时支撑时未考虑这种位移，则卸载后的结构形状将会发生变化，甚至会影响结构的使用。



图 7.1



图 7.2

结构的位移不仅影响到结构施工，在结构的刚度校核、超静定结构的计算以及结构的动力计算中也都需要考虑结构的位移。本章将首先对静定结构的位移计算进行研究。

7.1 位移计算概述

结构在荷载等因素作用时，要产生变形和位移。变形是指结构(或其一部分)形状的改变，位移则是指结构各截面位置的移动。结构的位移有两大类，一类是线位移，指结构上某点沿直线方向移动的距离；另一类是角位移，指结构上某截面转动的角度。如图 7.3(a)所示的悬臂刚架，在竖向力 P 作用下，刚架变形曲线以虚线示意，梁端 A 点移到 A'，AA'是 A 点的线位移，用 Δ_A 表示；它可分解为水平方向和竖直方向两个分量，分别以 Δ_{AH} 和 Δ_{AV} 表示。图中的 θ_A 为 A 截面的转角，也就是截面 A 的角位移。以上两种位移又称为绝对位移。有时要计算相对位移，即指两点或两截面之间的位置相对改变量，包括相对线位移和相对角位移，例如图 7.3(b)所示的刚架，在荷载作用下其变形如虚线所示，其中 A 点水平位移为 Δ_{Ax}，B 点水平位移为 Δ_{Bx}，则 A、B 两点间的相对水平位移为 $\Delta_{AB}=\Delta_{Ax}+\Delta_{Bx}$。另外，$C$ 截面的转角为 θ_C，D 截面的转角为 θ_D，则 C、D 两截面相对转角为 $\theta_{CD}=\theta_C+\theta_D$。

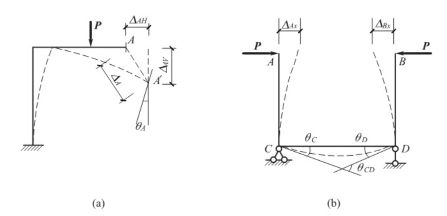


图 7.3

结构位移计算主要有以下目的应用：①验算结构的刚度，工程结构设计除了必须满足强度要求外，还必须保证具有足够的刚度，不能产生过大的变形，即结构的变形不得超过规范规定的容许值，如《钢结构设计规范》规定，楼(屋)盖主梁的挠度容许值为梁跨度的

1/400，轻级工作制桥式吊车梁挠度容许值为梁跨度的 1/800；②为超静定结构的内力计算作准备，因为在超静定结构计算中，不仅需考虑结构的平衡条件，还必须满足结构的变形协调条件，而建立变形协调条件，必须计算结构的位移；③施工阶段结构起拱，结构构件在使用中会产生变形，根据对变形的分析，在施工阶段，采取反向预加位移，这样在实际应用中能减小或抵消实际位移。如图 7.4 所示的桁架，竖向荷载作用时的挠度，通过施工阶段向上起拱，得以减小或抵消；④此外，在结构的动力计算和稳定计算中，也需要计算结构的位移。可见，结构的位移计算在工程上是具有重要意义的。

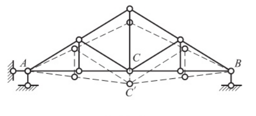


图 7.4

除荷载因素外，温度改变、支座移动、材料收缩和制造误差等，也是结构产生位移的原因。例如图 7.5(a)所示的刚架，外侧温度改变为 t_1℃，内侧温度改变为 t_2℃，当 $t_2>t_1$ 时刚架将发生虚线所示变形与位移；如图 7.5(b)所示的刚架，当支座 A 发生沉陷与滑移时，结构也会产生相应的位移。静定结构在温度改变与支座移动时，虽产生位移但并不产生内力。

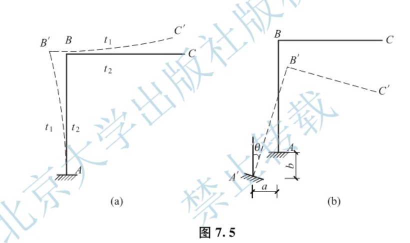


图 7.5

本章所研究的是线性变形体系位移的计算。所谓线性变形体系是指位移与荷载成比例的结构体系，荷载对这种体系的影响可以叠加，而且当荷载全部撤除后，由荷载引起的位移也完全消失，这样的体系，应力与应变的关系符合胡克定律，且变形应是微小的，在计算结构的反力和内力时，可认为结构的几何形状和尺寸以及荷载的位置和方向保持不变。

7.2 虚功和变形体虚功原理

1. 虚功

功等于力在作用点位移方向的分量与位移大小的乘积。功包含两个要素——力和位移，当力与位移分属于两个相互无关的状态时，这类功称为虚功。

例如在图 7.6 所示结构中，7.6(a)图 A 点处作用一个集中力 P，达到平衡，称为力状态。假设由于某种其他原因结构发生如图 7.6(b)中虚线所示的变形(为清晰起见，图中没有标明使结构发生变形的原因)，称为位移状态，力 P 的作用点由 A 移动到 A'，水平线位

移为Δ，则力P所做的虚功为

$$W=P\Delta$$

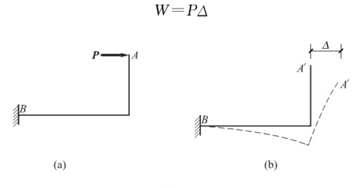


图 7.6

将上式的定义扩大，式中，W为虚功；P为广义力；Δ为广义虚位移。所谓虚位移，是指与力P作用无关，为约束条件所允许的任意微小位移。

若P是一个力，相应的Δ为沿这个力作用线方向的线位移。如图 7.7(a)所示，简支梁在C点作用一个竖向力，让它经历图 7.7(c)所示虚位移做功，相应的虚位移Δ是在C点沿力P作用方向的线位移。

如果P是一个力偶，相应的Δ为沿力偶作用方向的角位移。如图 7.7(b)所示，简支梁在B端作用一个力偶M，让它经历图 7.7(c)所示的位移做功，相应的位移Δ则是沿M作用方向的B端截面的转角θ。

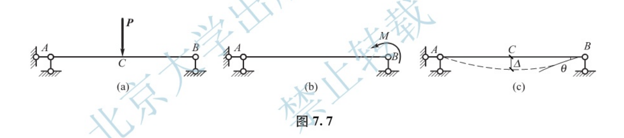


图 7.7

2. 变形体系的虚功原理

体系在变形过程中，不但各杆发生刚体运动，内部材料同时也产生应变，则该体系属于变形体系。

对于变形体体系，虚功原理可表述如下：体系在任意平衡力系作用下，对于任何虚位移，外力所做虚功总和等于各微段上的内力在其变形上所做的虚功总和。或者简单地说，外力虚功等于变形虚功，即

$$W_e=W_v \tag{7-1}$$

式中　W_e为体系的外力虚功；W_v为体系的内力虚功。

现简要说明上述原理的正确性，关于更详细的数学推导及证明，读者可参阅其他书籍。

图 7.8(a)表示结构在力系作用下处于平衡状态，图 7.8(b)表示该结构由于其他原因(图中未示出)而产生的虚位移状态，下面分别称这两个状态为结构的力状态和位移状态。

这里，虚位移必须是微小的，并为支承约束条件和变形连续条件所允许，即所谓协调的位移。

现从图 7.8(a)的力状态中取出一个微段来研究，作用在微段上的力除外力 q 外，还有两侧截面上的内力，即轴力、弯矩和剪力(这些力对整个结构而言是内力，对于所取微段而言则是外力，为了与整个结构的外力即荷载和支座反力相区别，仍称这些力为内力)，如图 7.8(c)所示。在图 7.8(b)的位移状态中，此微段与内力对应的变形如图 7.8(d)所示。

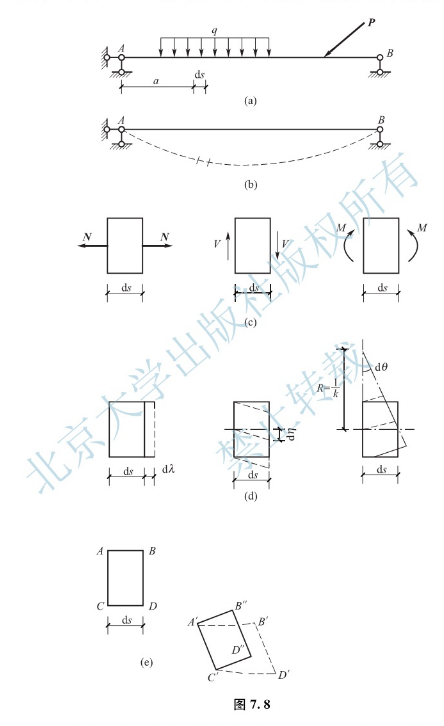


图 7.8

微段上的各力将在相应的位移上做虚功。把所有微段的虚功累加起来，便是整个结构的虚功。

下面按两种不同的途径来计算虚功。

(1) 按外力虚功与内力虚功计算。设作用于微段上所有各力所做虚功总和为 $\mathrm{d}W$，它可以分为两部分：一部分是外力所做的功 $\mathrm{d}W_e$，另一部分是截面上的内力所做的功

dW_i，即

$$dW=dW_e+dW_i$$

将其沿杆段积分并将各杆段积分总和起来，得整个结构的虚功为

$$\sum\int dW=\sum\int dW_e+\sum\int dW_i$$

简写为

$$W=W_e+W_i$$

式中，W_e 为整个结构的外力虚功总和；W_i 为所有微段上的内力所做虚功总和。

由于任意相邻两微段上的内力互为作用力与反作用力，它们大小相等方向相反；另一方面虚位移是协调的，满足变形连续条件，两微段相邻的截面总是密贴在一起而具有相同的位移，因此每一对相邻截面上的内力所做虚功总是大小相等正负互相抵消。因此，所有微段上的内力所做虚功总和为零，即

$$W_i=0$$

于是，整个结构上的总虚功便等于外力虚功：

$$W=W_e$$

(2) 按刚体虚功与变形虚功计算。对于微段，又可以把位移分解为先发生刚体位移(由 $ABCD$ 移到 $A'B'C'D'$)，再发生变形位移(截面 $A'C'$ 不动，$B'D'$ 因变形移到 $B''D''$)的叠加，如图 7.8(e)所示。作用于微段上所有各力在刚体位移上所做虚功总和为 dW_s，在变形位移上所做虚功总和为 dW_v，则微段的总虚功为

$$dW=dW_s+dW_v$$

由于微段处于平衡状态，故由刚体的虚功原理可知：

$$dW_s=0$$

于是，

$$dW=dW_v$$

将其沿杆段积分并将各杆段积分总和起来，得整个结构的虚功为

$$\sum\int dW=\sum\int dW_v$$

即
$$W=W_v$$

因此
$$W_e=W_v$$

由以上过程说明变形体虚功原理成立。

微段上内力所做虚功写为

$$dW_v=Md\theta+V\gamma ds+Nd\lambda$$

对于整个结构：

$$W_v=\sum\int dW_v=\sum\int Md\theta+\sum\int V\gamma ds+\sum\int N\,d\lambda \tag{7-2}$$

故虚功方程为

$$W=\sum\int dW_v=\sum\int Md\theta+\sum\int V\gamma ds+\sum\int Nd\lambda \tag{7-3}$$

在上述讨论中，并没有涉及材料的物理性质，因此虚功原理适用于弹性、非弹性、线性、非线性的变形体系。

刚体虚功原理可看成是变形体虚功原理的一个特例。刚体在发生位移时各微段上不产生任何变形，故变形虚功 $dW_v=0$。此时式(7-1)成为

$$W=0$$

即外力虚功为零。

7.3 单位荷载法计算位移和位移计算的一般公式

如何利用虚功原理来求解平面杆系结构由于荷载、温度变化及支座移动等因素引起的任一指定截面的位移，是下面要讨论的问题。

要应用虚功原理，就需要有两个状态：位移状态和力状态。现在，要求的位移是由给定的荷载、温度变化及支座移动等因素引起的，故应以此作为结构的位移状态，并称为实际状态。另外，还需要建立一个力状态。由于力状态与位移状态是彼此独立无关的，因此力状态完全可以根据计算的需要来假设。这个力状态并不是实际原有的，而是虚设的，故称为虚拟状态。如图 7.9(a)所示，为了计算位移状态中 K 点沿 $m—m$ 方向的位移 Δ_K，可以在力状态中的 K 点沿 $m—m$ 方向加一个集中荷载 P_K，以便力状态中的外力能在位移状态中所求位移上做虚功，其箭头指向则可假设，并且为了计算方便，令 $P_K=1$(属单位物理量，这种量的量纲为一，称为无量纲量，以下类同)，称为单位荷载，或单位力，如图 7.9(b)所示。

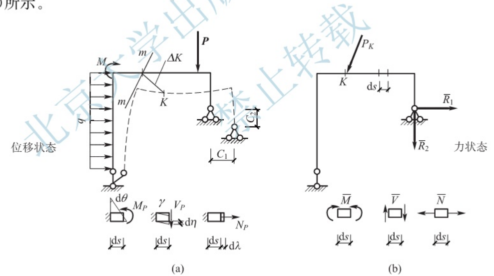


图 7.9

现在来计算虚拟状态的外力和内力在实际状态相应的位移和变形上所做的虚功。外力虚功包括荷载和支座反力所做的虚功。设在虚拟状态中由单位荷载 $P_K=1$ 引起的支座反力为 $\overline{R}_1$、$\overline{R}_2$，而在实际状态中相应的支座位移为 c_1、c_2，则外力虚功为

$$W=P_K\cdot\Delta_K+\overline{R}_1c_1+\overline{R}_2c_2=P_K\cdot\Delta_K+\sum\overline{R}_i\cdot c_i$$

这样，单位荷载 $P_K=1$ 所做的虚功恰好就等于所要求的位移 Δ_K。

计算变形虚功时，设虚拟状态中由单位荷载 $P_K=1$ 作用而引起的某微段上的内力为 $\overline{M}$、$\overline{V}$、$\overline{N}$，而实际状态中微段相应的变形为 $d\theta$、γds、$d\lambda$，则变形虚功：

$$dW_v = \overline{M}d\theta + \overline{V}\gamma ds + \overline{N}d\lambda$$

$$W_v = \sum\int\overline{M}d\theta + \sum\int\overline{V}\gamma ds + \sum\int\overline{N}d\lambda$$

由虚功原理 $W=W_v$，有

$$1\cdot\Delta_K = \sum\int\overline{M}d\theta + \sum\int\overline{V}\gamma ds + \sum\int\overline{N}d\lambda - \sum\overline{R_i}\cdot c_i$$

则

$$\Delta_K = \sum\int\overline{M}d\theta + \sum\int\overline{V}\gamma ds + \sum\int\overline{N}d\lambda - \sum\overline{R_i}\cdot c_i \tag{7-4}$$

这就是平面杆件结构位移计算的一般公式。

如果已知实际状态的支座位移 c，又确定了虚拟状态的反力$\overline{R}_i$和内力$\overline{M}$、$\overline{V}$、$\overline{N}$，并求得了微段的变形 $d\theta$、γds、$d\lambda$，则由式(7－4)可算出位移 Δ_K。等号右边的四个乘积中，当虚设状态中的 $\overline{M}$、$\overline{V}$、$\overline{N}$及反力$\overline{R}_i$与实际状态中的 $d\theta$、γds、$d\lambda$、c 方向一致时，力与变形的乘积为正，反之为负。

若计算结果为正，表示单位荷载所做虚功为正，故所求位移 Δ_K 的实际指向与所假设的单位荷载 $P_K=1$ 的指向相同，为负则相反。

由上可以看出，利用虚功原理求结构的位移，关键在于虚设恰当的力状态，而方法的巧妙之处在于虚拟状态中只需在所求位移处沿所求位移方向加一个单位荷载，以便荷载虚功恰好等于所求位移。这种计算位移的方法称为单位荷载法。

在实际问题中，除了计算线位移 Δ_K 外，还需要计算角位移、相对位移等，现在讨论如何按照所求位移类型的不同，设置相应的虚拟状态。

由上已知，当要求某点沿某方向的线位移时，在该点沿所求位移方向加一个单位集中力，如图 7.10(a)所示，即为求 A 点水平位移时的虚拟状态。

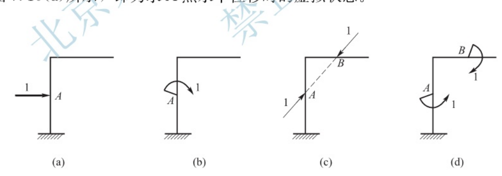


图 7.10

当求某截面的角位移时，则需在该截面处加一个单位力偶，如图 7.10(b)所示，这样，荷载所做的虚功为 $1\cdot\theta_A$，即恰好等于所要求的角位移。

要求两点间距离的变化，也就是求两点沿其连线方向上的相对线位移，应在两点沿其连线方向上加一对指向相反的单位力，如图 7.10(c)所示。对此，设在实际状态中 A 点沿 AB 方向的位移为Δ_A，B 点沿 AB 方向的位移为Δ_B，则两点沿其连线方向上的相对线位移 $\Delta_{AB}=\Delta_A+\Delta_B$，对于图 7.10(c)所示的虚拟状态，荷载所做的虚功为

$$1\cdot\Delta_A + 1\cdot\Delta_B = 1\cdot(\Delta_A+\Delta_B) = \Delta_{AB}$$

可见荷载所做的虚功恰好等于所求的相对位移。

同理，若要求两截面的相对角位移，就应在两截面处加一对方向相反的单位力偶，如图 7.10(d)所示。

这里，注意广义位移和广义力的概念。线位移、角位移、相对线性移、相对角位移以及某一组位移等可以统称为广义位移；而集中力、力偶、一对集中力、一对力偶以及某一力系等，则统称为广义力。这样，在求任何广义位移时，虚拟状态所加的荷载就应是与所求广义位移相应的单位广义力。这时，“相应”是指力与位移在做功的关系上的对应，如集中力与线位移对应，力偶与角位移对应等。

在求桁架某杆的角位移时，由于桁架只承受轴力，应将单位力偶换为等效的结点集中荷载，即在该杆两端加一对方向与杆件垂直、大小等于杆长倒数而指向相反的集中力，如图 7.11(a)所示。这是因为在位移微小的情况下，桁架杆件的角位移等于其两端在垂直于杆轴方向上的相对线位移除以杆长，如图 7.11(b)所示，即

$$\varphi_{AB}=\frac{\Delta_A+\Delta_B}{d}$$

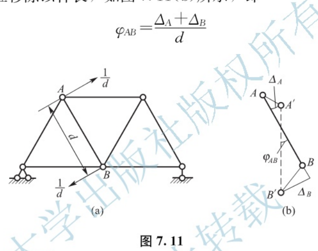


图 7.11

这样，荷载所做虚功为

$$\frac{1}{d}\cdot\Delta_A+\frac{1}{d}\cdot\Delta_B=\frac{\Delta_A+\Delta_B}{d}=\varphi_{AB}$$

即等于所求杆件角位移。

位移计算一般公式（7－4）可应用于计算不同的材料、不同的变形类型、产生变形的不同原因以及不同结构类型的位移。

拟求结构某点沿某方向的位移 Δ，计算步骤如下。

(1) 在某点沿拟求位移 Δ 的方向加一个虚设的单位荷载 $P=1$。

(2) 在单位荷载作用下，根据结构的平衡条件，计算结构的内力$\overline{M}$、$\overline{V}$、$\overline{N}$和支座反力$\overline{R}_i$。

(3) 用式(7－4)计算位移 Δ。

7.4 荷载作用下的位移计算

本节讨论静定结构在荷载作用下的位移计算。仅限于研究线弹性结构，即结构的位移与荷载是成正比的，因而计算位移时荷载的影响可以叠加，而且当荷载全部撤除后位移也完全消失，位移应是微小的，应力与应变的关系符合胡克定律。

1. 荷载作用下位移的计算公式

设图 7.12(a)所示结构只受到广义荷载 P(包括集中力、力偶、均布荷载等)作用,现要求 K 点沿指定方向 $m—m$ 的位移 Δ_{KP}。位移 Δ_{KP} 用了两个下标:第一个下标 K 表示该位移的位置和方向,即 K 点沿指定方向;第二个下标 P 表示引起该位移的原因,即是由于广义荷载引起的。此时,由于没有支座移动,故式(7-4)中的最后一项 $\sum\overline{R}\cdot c$ 为零,因而位移计算公式为

$$\Delta_{KP}=\sum\int\overline{M}\mathrm{d}\theta+\sum\int\overline{V}\gamma\mathrm{d}s+\sum\int\overline{N}\mathrm{d}\lambda \tag{a}$$

$$\mathrm{d}\theta=\frac{M_P}{EI}\mathrm{d}s \tag{b}$$

$$\gamma\mathrm{d}s=\frac{\tau}{G}\mathrm{d}s=k\frac{V_P}{GA}\mathrm{d}s \tag{c}$$

$$\mathrm{d}\lambda=\frac{N_P}{EA}\mathrm{d}s \tag{d}$$

式中,E、G 分别为材料的弹性模量和剪切模量;A、I 为分别为杆件截面的面积和惯性矩;EA、GA、EI 分别为杆件截面的抗拉、抗剪和抗弯刚度;K 为切应力在截面上分布不均匀而加的修正系数,与截面形状有关,矩形截面 $k=1.2$,圆形截面 $k=10/9$,薄壁圆环形截面 $k=2$,工字形或箱形截面 $k=A/A_1$(A_1 为腹板面积)。

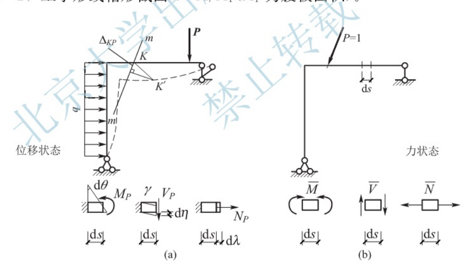


图 7.12

将式(b)、式(c)、式(d)式代入式(a)得到结构在荷载作用下的位移计算公式为

$$\Delta_{KP}=\sum\int\frac{\overline{M}M_P}{EI}\mathrm{d}s+\sum\int\frac{k\overline{V}V_P}{GA}\mathrm{d}s+\sum\frac{\overline{N}N_P}{EA}\mathrm{d}s \tag{7-5}$$

式中,$\overline{M}$、$\overline{V}$、$\overline{N}$为虚设单位荷载引起的内力;M_P、V_P、N_P 为实际荷载引起的内力。当两套内力引起的杆件变形方向相同时,乘积取正,相反时乘积取负。式(7-5)右边三项分别代表结构的弯曲变形、剪切变形和轴向变形对所求位移的影响。

2. 各类结构的位移计算公式及计算位移的步骤

在实际计算中，根据结构的具体情况，常常可以只考虑其中的一项(或两项)。

对于梁和刚架，位移主要是由弯矩引起的，轴力和剪力的影响很小，一般可以略去，故式(7-5)可简化为

$$\Delta_{KP}=\sum\int\frac{\overline{M}M_P}{EI}\mathrm{d}x \tag{7-6}$$

在桁架中，因只有轴力作用，且同一杆件的轴力$\overline{N}$、N_P及面积A沿杆长l均为常数，故式(7-5)成为

$$\Delta_{KP}=\sum\int\frac{\overline{N}N_P}{EA}\mathrm{d}s=\sum\frac{\overline{N}N_P}{EA}\int\mathrm{d}x=\sum\frac{\overline{N}N_P}{EA}l \tag{7-7}$$

对于组合结构，其中的受弯杆件可只计弯矩一项的影响，链杆则只有轴力影响，故其位移计算公式可写为

$$\Delta_{KP}=\sum\int\frac{\overline{M}M_P}{EI}\mathrm{d}s+\sum\frac{\overline{N}N_P}{EA}l \tag{7-8}$$

对于一般的实体拱，计算位移时可忽略曲率对位移的影响，只考虑弯矩的影响，即式(7-6)。但在扁平拱中需考虑弯矩和轴力的影响：

$$\Delta_{KP}=\sum\int\frac{\overline{M}M_P}{EI}\mathrm{d}s+\sum\int\frac{\overline{N}N_P}{EA}\mathrm{d}s \tag{7-9}$$

现说明式(7-5)剪切变形中修正系数k的来源。由于虚拟状态中切应力沿截面高度分布是不均匀的［图7.13(a)］，实际状态中切应力τ_P也是按同样规律不均匀分布的［图7.13(b)］，因而其相应的切应变γ分布亦不均匀，所以上述微段上剪力所做的虚功$\overline{V}\gamma\mathrm{d}s$应按下列积分式来计算：

$$\overline{V}\gamma\mathrm{d}s=\int_A\bar{\tau}\,\mathrm{d}A\cdot\gamma\mathrm{d}s=\mathrm{d}s\int_A\bar{\tau}\gamma\mathrm{d}A$$

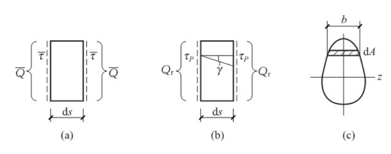


图7.13

由材料力学可知：

$$\bar{\tau}=\frac{\overline{V}S}{I_zb},\quad \tau_P=\frac{V_PS}{I_zb},\quad \gamma=\frac{\tau_P}{G}=\frac{V_PS}{GI_zb}$$

式中　b为所求切应力处截面的宽度；S为该处以上(或以下)截面对中性轴z的静矩［图7.13(c)］。

其余符号意义同前。代入式$\overline{V}\gamma\mathrm{d}s$，就有

$$\overline{V}\gamma \mathrm{d}s = \mathrm{d}s\int_A \frac{\overline{V}V_P S^2 \mathrm{d}A}{GI_z^2 b^2} = \frac{\overline{V}V_P \mathrm{d}s}{GA} \cdot \frac{A}{I_z^2}\int_A \frac{S^2}{b^2}\mathrm{d}A = \frac{k\overline{V}V_P \mathrm{d}s}{GA}$$

式中

$$k = \frac{A}{I_z^{\ 2}}\int \frac{S^2}{b^2}\mathrm{d}A$$

即切应力在截面上分布不均匀的修正系数，它是一个只与截面形状有关的系数，对于几种常见的截面，k 值已在前面给出，读者可自行校核。

3. 荷载作用下位移计算举例

梁和刚架位移的计算步骤如下。

(1) 沿拟求位移 Δ 的位置和方向虚设相应的单位荷载。

(2) 根据静力平衡条件，列实际荷载作用下各杆段的弯矩方程 M_P。

(3) 根据静力平衡条件，列虚拟单位荷载作用下各杆段的弯矩方程$\overline{M}$。

(4) 代入梁和刚架的位移计算公式(7－6)，计算位移 Δ。

桁架位移的计算步骤如下。

(1) 沿拟求位移 Δ 的位置和方向虚设相应的单位荷载。

(2) 根据静力平衡条件，计算实际荷载引起的各杆内力 N_P。

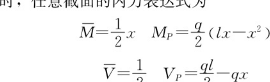
(3) 根据静力平衡条件，计算虚拟单位荷载引起的各杆内力$\overline{N}$。

(4) 代入桁架位移计算公式(7－7)，计算位移 Δ。

【例 7－1】 试求图 7.14(a)所示简支梁在中点 C 的竖向位移Δ，并比较弯曲变形与剪切变形对位移的影响。梁的截面为矩形，面积为 $b\times h$。

解： (1) 在 C 点设相应于竖向位移的单位力 $P=1$，如图 7.14(b)所示。

(2) 由平衡条件求实际荷载作用下的内力，再求虚设单位荷载作用下的内力。设 A 点为坐标原点，当 $0\leqslant x\leqslant l/2$ 时，任意截面的内力表达式为



$$\overline{M}=\frac{1}{2}x \quad M_P=\frac{q}{2}(lx-x^2)$$

$$\overline{V}=\frac{1}{2} \quad V_P=\frac{ql}{2}-qx$$

图 7.14

注意到两弯矩图图形对称，可计算一半再乘两倍。

(3) 计算 Δ_M(弯曲变形引起的位移)。将以上内力表达式代入式(7－6)：

$$\begin{aligned}\Delta_M &= 2\int_0^{l/2} \frac{1}{EI}\times\frac{x}{2}\times\frac{q}{2}(lx-x^2)\mathrm{d}x \\ &= \frac{q}{2EI}\int_0^{l/2}(lx^2-x^3)\mathrm{d}x \\ &= \frac{5ql^4}{384EI}(\downarrow)\end{aligned}$$

Δ_M 为正值，说明 C 点挠度与虚设力方向一致。

(4) 比较剪切变形与弯曲变形对位移的影响。现分析剪切变形引起的位移（对于矩形

截面 $k=1.2$)。

$$\Delta_V = k\int \frac{\overline{V}V_P}{GA}\mathrm{d}s = 2\times 1.2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{q}{2}(l-2x)}{GA} = 0.15\,\frac{ql^2}{GA}(\downarrow)$$

轴向变形引起的位移为零(因梁的轴力为零)。

所以 C 点的总位移为

$$\Delta=\Delta_M+\Delta_V=\frac{5ql^2}{384EI}+0.15\,\frac{ql^2}{GA}$$

剪切与弯曲位移两者的比值为

$$\frac{\Delta_V}{\Delta_M}=\frac{0.15\,\frac{ql^2}{GA}}{\frac{5ql^2}{384EI}}=11.52\,\frac{EI}{GAl^2}$$

对于矩形截面,$I/A = h^2/12$,设泊松比 $\mu=0.3$,则 $E/G=2(1+\mu)=8/3$,代入上式,得

$$\frac{\Delta_V}{\Delta_M}=2.56\left(\frac{h}{l}\right)^2$$

当梁的高跨比 h/l 是 1/10 时,则$\frac{\Delta_V}{\Delta_M}=2.56\%$,剪力的影响不到弯矩影响的 3%,故对于细长的梁可以忽略剪切变形对位移的影响,直接用式(7-6)计算位移。但是当梁的高跨比增大为 1/5 时,则$\frac{\Delta_V}{\Delta_M}$增大为 10%,因此,对于高跨比较大的梁,剪切变形对位移的影响不可忽略。

【例 7-2】 试求图 7.15(a)所示结构 C 端的水平位移 Δ_{CH} 和角位移 θ_C。已知 EI 为一常数。

解: (1) 求 C 端的水平位移 Δ_{CH}。

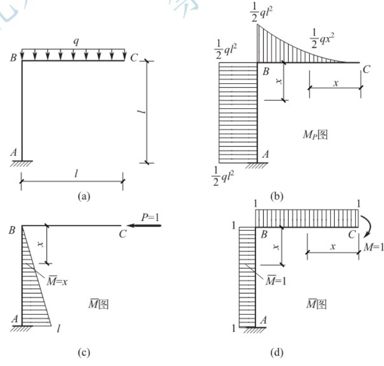


图 7.15

① 在 C 点设相应于水平位移的水平单位力，其方向取为向左，如图 7.15(c)所示。

② 列两种状态下的弯矩方程：

横梁 BC 上 $\qquad \overline{M}=0,\quad M_P=-\frac{1}{2}qx^2$

竖柱 AB 上 $\qquad \overline{M}=x,\quad M_P=-\frac{1}{2}ql^2$

③ 代入式(7-6)，得 C 端水平位移为

$$\Delta_{CH}=\sum\int\frac{\overline{M}M_P}{EI}\mathrm{d}x=\frac{1}{EI}\int_0^l x\times\left(-\frac{1}{2}ql^2\right)\mathrm{d}x=-\frac{ql^4}{4EI}(\rightarrow)$$

计算结果为负，表示实际位移与所设虚拟单位荷载的方向相反，即为向右。

(2) 求 C 端的角位移 θ_C。

① 在 C 点设相应于转角位移的单位力矩，其方向取为顺时针方向，如图 7.15(d)所示。

② 列两种状态下的弯矩方程：

横梁 BC 上 $\qquad \overline{M}=-1,\quad M_P=-\frac{1}{2}qx^2$

竖柱 AB 上 $\qquad \overline{M}=-1,\quad M_P=-\frac{1}{2}ql^2$

③ 代入式(7-6)，得 C 端的角位移为

$$\theta_C=\frac{1}{EI}\int_0^l(-1)\left(-\frac{1}{2}qx^2\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{EI}\int_0^l(-1)\left(-\frac{1}{2}ql^2\right)\mathrm{d}x=\frac{2ql^3}{3EI}(\circlearrowright)$$

计算结果为正，表示 C 端转动的方向与虚拟力矩的方向相同，即为顺时针方向转动。

【例 7-3】 计算图 7.16(a)所示木桁架下弦中间结点 5 的挠度。已知各杆弹性模量 $E=850\times10^7\text{Pa}$，截面面积 $A=0.12\text{m}\times0.12\text{m}=0.014\text{m}^2$。

解：(1) 在 5 点加竖向单位力，如图 7.16(b)所示。

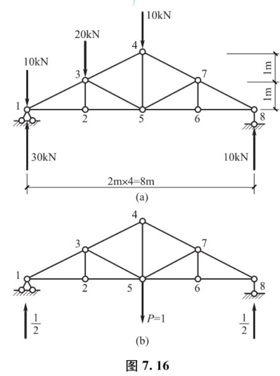


图 7.16

(2) 求 $\overline{N}$。计算在 $P=1$ 作用下各杆的轴力。数值见表 7－1。

(3) 求 N_P。计算在荷载作用下各杆的轴力。数值见表 7－1。

(4) 计算位移 Δ。根据桁架位移式(7－7)，得

$$\Delta_P=\sum\frac{\overline{N}N_P}{EA}l=0.0044\text{m}=4.4\text{mm}$$

正号表示结点 5 处的挠度向下，与所设单位力方向相同。

表 7－1 为例 7－3 的计算表。

表 7－1　例 7－3 的计算表

杆件		l/m	$\overline{F}_N$	F_{NP}/kN	$\overline{F}_N F_{NP} l/(\text{kN}\cdot\text{m})$
上弦	1－3	$\sqrt{5}$	$-0.5\sqrt{5}$	$-20\sqrt{5}$	$50\sqrt{5}$
	3－4	$\sqrt{5}$	$-0.5\sqrt{5}$	$-10\sqrt{5}$	$25\sqrt{5}$
	4－7	$\sqrt{5}$	$-0.5\sqrt{5}$	$-10\sqrt{5}$	$25\sqrt{5}$
	7－8	$\sqrt{5}$	$-0.5\sqrt{5}$	$-10\sqrt{5}$	$25\sqrt{5}$
下弦	1－2	2	1	40	80
	2－5	2	1	40	80
	5－6	2	1	20	40
	6－8	2	1	20	40
竖杆	2－3	1	0	0	0
	4－5	2	1	10	20
	6－7	1	0	0	0
斜杆	3－5	$\sqrt{5}$	0	$-10\sqrt{5}$	0
	5－7	$\sqrt{5}$	0	0	0
					$\sum=125\sqrt{5}+260$

【例 7－4】 图 7.17(a)所示为一等截面圆弧形曲杆 AB，截面为矩形，圆弧 AB 的圆心角为 α，半径为 R。设沿水平线作用均布竖向荷载 q，求 B 点的竖向位移，并比较剪切变形和轴向变形对位移的影响。

解： (1) 在 B 点加单位竖向荷载 $P=1$，如图 7.17(b)所示。

(2) 分别求在实际荷载和虚设单位荷载作用下的内力。取 B 点为坐标原点，任一点 C 的坐标为 x、y，圆心角为 θ。任意截面 x 的内力为

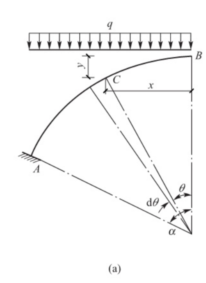
实际荷载　　　　　虚设荷载

$M_P=-\dfrac{1}{2}qx^2$　　　　$\overline{M}=-x$

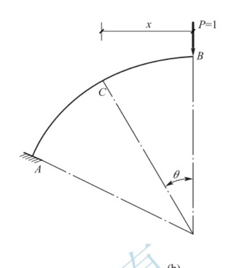
$N_P=-qx\sin\theta$　　　　$\overline{N}=-\sin\theta$

$V_P=qx\cos\theta$　　　　$\overline{V}=\cos\theta$

(3) 计算 Δ。位移公式为(忽略了曲率的影响)



(a)



(b)

图 7.17

$$\Delta=\sum\int\frac{\overline{M}M_P}{EI}\mathrm{d}s+\sum\int\frac{k\,\overline{V}V_P}{GA}\mathrm{d}s+\sum\frac{\overline{N}N_P}{EA}\mathrm{d}s$$

为比较，分别计算 M、N、V 引起的位移，并用 Δ_M、Δ_N、Δ_V 表示：

$$\Delta_M=\int_B^A\frac{\overline{M}M_P}{EI}\mathrm{d}s=\frac{q}{2EI}\int_B^A x^3\,\mathrm{d}s$$

$$\Delta_N=\int_B^A\frac{\overline{N}N_P}{EA}\mathrm{d}s=\frac{q}{EA}\int_B^A x\sin^2\theta\mathrm{d}s$$

$$\Delta_V=\int_B^A k\,\frac{\overline{V}V_P}{GA}\mathrm{d}s=k\,\frac{q}{GA}\int_B^A x\cos^2\theta\mathrm{d}s$$

为统一变量，取 θ 为变量，则

$$x=R\sin\theta,\quad y=R(1-\cos\theta),\quad \mathrm{d}s=R\mathrm{d}\theta$$

代入上式得

$$\Delta_M=\frac{qR^4}{2EI}\int_0^\alpha\sin^3\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\Delta_N=\frac{qR^2}{EA}\int_0^\alpha\sin^3\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\Delta_V=k\,\frac{qR^2}{GA}\int_0^\alpha\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

由于

$$\int_0^\alpha\sin^3\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^\alpha(1-\cos^3\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=\left[-\cos\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]\Big|_0^\alpha$$

$$=\frac{2}{3}-\cos\alpha+\frac{1}{3}\cos^3\alpha$$

$$\int_0^\alpha\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta=\left(-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)\Big|_0^\alpha=\frac{1}{3}(1-\cos^3\alpha)$$

所以

$$\Delta_M=\frac{qR^4}{2EI}\left(\frac{2}{3}-\cos\alpha+\frac{1}{3}\cos^3\alpha\right)$$

$$\Delta_N=\frac{qR^2}{EA}\left(\frac{2}{3}-\cos\alpha+\frac{1}{3}\cos^3\alpha\right)$$

$$\Delta_V=k\,\frac{qR^2}{GA}\frac{1}{3}(1-\cos^3\alpha)$$

如果 $\alpha=90°$，则

$$\Delta_M=\frac{qR^4}{3EI}$$

$$\Delta_N=\frac{2qR^2}{3EA}$$

$$\Delta_V=k\,\frac{qR^2}{3GA}$$

(4) 比较各项内力因素对位移的影响。为了进行比较，求出$\frac{\Delta_N}{\Delta_M}$和$\frac{\Delta_V}{\Delta_M}$这两个比值。

若 $\alpha=90°$，$h/R=1/10$，$E/G=8/3$，截面为矩形，$I/A=h^2/12$，$k=1.2$，则

$$\frac{\Delta_N}{\Delta_M}=\frac{2I}{R^2A}=\frac{1}{6}\left(\frac{h}{R}\right)=\frac{1}{600}$$

$$\frac{\Delta_V}{\Delta_M}=\frac{kEI}{R^2GA}=\frac{k}{12}\frac{E}{G}\left(\frac{h}{R}\right)^2=\frac{1}{375}$$

计算结果表明，在给定的条件下，轴力和剪力所引起的位移可以忽略不计。

7.5 图 乘 法

由 7.4 节知道，计算在荷载作用下梁、刚架的位移时，要先列出$\overline{M}$、M_P的方程，再计算$\int\frac{\overline{M}M_P}{EI}\mathrm{d}x$是比较麻烦的。但是，当结构的各杆段符合杆轴为直线，$EI=$常数，$\overline{M}$、M_P两个弯矩图中至少有一个是直线图形的条件时，则可用图乘法来代替积分运算，从而简化计算工作。

1. 图乘法公式

如图 7.18 所示，设等截面直杆 AB 段上的两个弯矩图中$\overline{M}$图为一段直线，而 M_P 为任意形状。以杆轴为 x 轴，以$\overline{M}$图的延长线与 x 轴的交点 O 为原点，并设置 y 轴，则积分式为

$$\int_A^B\frac{\overline{M}M_P}{EI}\mathrm{d}s=\frac{1}{EI}\int_A^B x\tan\alpha M_P\,\mathrm{d}x=\frac{\tan\alpha}{EI}\int_A^B x\,\mathrm{d}A \tag{7-10}$$

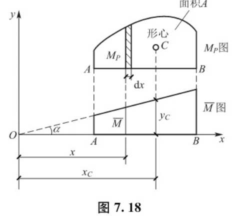


图 7.18

式中，$\mathrm{d}A=M\mathrm{d}x$，为 M_P 图中有阴影线的微分面积。故 $x\mathrm{d}A$ 为微分面积对 y 轴的静矩。$\int_A^B x\,\mathrm{d}A$ 即为整个 M_P 图的面积对 y 轴的静矩，等于 M_P 图的面积 A

乘以其形心 C 到 y 轴的距离 x_C，即

$$\int_A^B x\,\mathrm{d}A = Ax_C$$

代入式(7－10)：

$$\int_A^B \frac{\overline{M}M_P}{EI}\mathrm{d}s = \frac{1}{EI}\tan\alpha \cdot A \cdot x_C = \frac{A \cdot y_C}{EI}$$

式中，A 为 AB 杆$\overline{M}$图形的面积；y_C 为 M_P 图的形心 C 处所对应的$\overline{M}$图的竖标。

可见，上述积分式等于一个弯矩图的面积 A 乘以其形心处所对应的另一个直线弯矩图上的竖标 y_C，再除以 EI，这就是图乘法。

如果结构上所有各杆段均可图乘，则位移计算公式(7－6)可写为

$$\Delta_{KP} = \sum\int\frac{\overline{M}_i M_P}{EI}\mathrm{d}s = \sum\frac{A \cdot y_C}{EI} \tag{7-11}$$

式(7－11)即为杆件仅考虑弯曲影响的图乘计算公式。一般来说，两个函数积的积分，只要其中的一个函数是直线函数，均可化成图乘这样的代数计算。

图乘法是 Vereshagin 于 1925 年在莫斯科铁路运输学院读书时提出的。

根据上面的推导过程，可知在应用图乘法时需注意下列各点。

(1) 必须符合图乘法适用条件；

(2) 竖标 y_C 只能取自直线图形；

(3) A 与 y_C 若在杆件的同侧则乘积取正号，在异侧则取负号。

图 7.19 列出了常用的几种简单图形的面积及形心位置。在应用各抛物线图形时，顶点处切线必须平行于基线，即顶点处 $Q=0$。顶点在中点或端点者可称为“标准抛物线图形”。

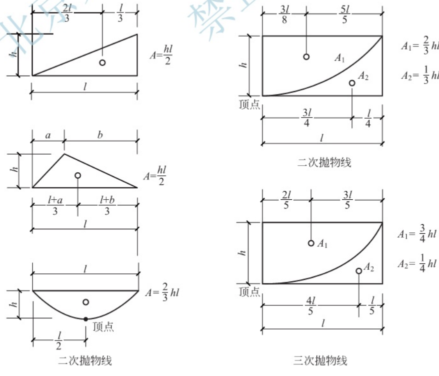


图 7.19

2. 图形的叠加与分段

1）图形的叠加

当图形的形心位置或面积不便确定时，可以将它分解为几个简单的图形，分别与另一图形相乘，然后把所得结果叠加。

例如，图 7.20 所示两个梯形相乘时，可不必定出 M_P 图的梯形形心位置，而把它分解成两个三角形(也可分为一个矩形及一个三角形)。此时，$M_P = M_{P1} + M_{P2}$，故有

$$Ay_C = A_1 y_1 + A_2 y_2$$

$$A_1 = la/2 \quad y_1 = 2c/3 + d/3$$

$$A_2 = lb/2 \quad y_2 = c/3 + 2d/3$$

注意：y_1、y_2 为直线图形中的纵坐标，宜采取简便的方法求得。

$$\frac{1}{EI}\int \overline{M}M_P \mathrm{d}x = \frac{1}{EI}\int \overline{M}(M_{P1} + M_{P2})\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\int \overline{M}M_{P1}\mathrm{d}x + \int \overline{M}M_{P2}\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{EI}\left(\frac{la}{2}y_1 + \frac{lb}{2}y_2\right)$$

当 M_P 或 $\overline{M}$ 图位于基线的两侧时，如图 7.21 所示，较快捷的方法是将图形分解为位于基线两侧的两个三角形，再按上述方法分别图乘，然后叠加。

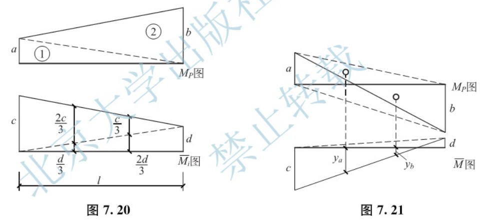


图 7.20　　　　图 7.21

结构中均布荷载作用下的任意一段直杆，如图 7.22(a)所示，其弯矩图均可看成一个梯形与一个标准抛物线图形的叠加。因为这段直杆的弯矩图与图 7.22(b)所示相应简支梁在两端弯矩 M_A、M_B 和均布荷载 q 作用下的弯矩图是相同的。需要注意，所谓弯矩图的叠加，是指其竖标的叠加，而不是原图形状的剪贴拼合。因此，叠加后的抛物线图形的所有竖标仍应为竖向的，而不是垂直于 M_A 与 M_B 的连线方向。这样，叠加后的抛物线图形与原标准抛物线在形状上并不相同，但两者任一处对应的竖标 y 和微段长度 $\mathrm{d}x$ 仍相等，因而对应的每一微分面积仍相等。由此可知，两个图形总的面积大小和形心位置仍然是相同的。理解了这个道理，对于分解复杂的弯矩图形是有利的。

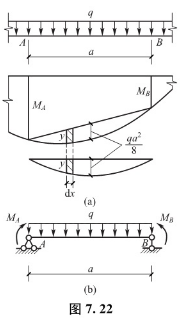


图 7.22

2）分段

在应用图乘法时，当 y_C 所属图形不是一段直线而是由若干段直线组成时，或当各杆段的截面不相等时，均应分段图乘，再进行叠加。例如，对于图 7.23 应为

$$\int \overline{M}M_P\mathrm{d}x = A_1y_1 + A_2y_2 + A_3y_3$$

杆件各段有不同的 EI，则应在 EI 变化处分段，分段进行图乘。如图 7.24 所示情形，有

$$\int \frac{\overline{M}M_P}{EI}\mathrm{d}x = \frac{1}{EI_1}\int \overline{M}M_{P1}\mathrm{d}x + \frac{1}{EI_2}\int \overline{M}M_{P2}\mathrm{d}x\ \frac{1}{EI_3}\int \overline{M}M_{P3}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{EI_1}A_1y_1 + \frac{1}{EI_2}A_2y_2 + \frac{1}{EI_3}A_3y_3$$

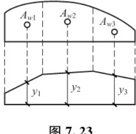


图 7.23

A_{w1} A_{w2} A_{w3} I_1 I_2 I_3 y_1 y_2 y_3

图 7.24

3. 图乘法计算位移举例

【例 7-5】 计算图 7.25(a)所示简支梁在均布荷载 q 作用时，中点 C 的挠度 Δ_C 及 A 端的转角 θ_A。EI 为常数。

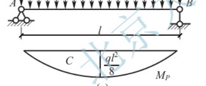
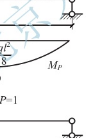
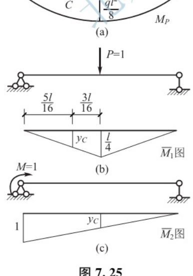




图 7.25

解 （1）计算中点的挠度。

① 在简支梁跨中点 C 设竖向单位力，如图 7.25(b)所示。

② 分别作 M_P 和$\overline{M}_1$图，见图 7.25(a)、图 7.25(b)。

③ 用图乘法公式(7-11)计算 C 点挠度。因 M_P 图是曲线，应以 M_P 图作为面积，而$\overline{M}$图是由两直线组成，应分两段进行。注意到两弯矩图图形对称，可计算一半再乘两倍。

$$\Delta_C = \frac{2}{EI}\left[\left(\frac{2}{3}\times\frac{l}{2}\times\frac{1}{8}ql^2\right)\left(\frac{5}{8}\times\frac{l}{4}\right)\right] = \frac{5ql^4}{384EI}(\downarrow)$$

图形相乘所得结果与例 7-2 用积分计算的结果完全一样。

(2) 计算 A 端转角。

① 在简支梁 A 端设单位力偶，如图 7.25(c)所示。

② 作$\overline{M}_2$图，如图 7.25(c)所示。

③ 用图乘法公式(7-11)计算 B 端转角。

$$\theta_A = \frac{1}{EI}\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{8}ql^2\times l\times\frac{1}{2}\right) = \frac{ql^3}{24EI}$$

计算结果为正，表示 A 端转动的方向与虚拟力矩的方向相同，即为顺时针方向转动。

【例 7-6】 试求图 7.26(a)所示的梁在已知荷载作用下，A 截面的角位移 θ_A 及 C 点的竖向线位移 Δ_{CV}。EI 为常数。

解： (1) 分别建立在 $m=1$ 及 $P=1$ 作用下的虚设状态，如图 7.26(b)、(c)所示。

(2) 分别作荷载作用和单位力作用下的弯矩图，如图 7.26(a)、(b)、(c)所示。

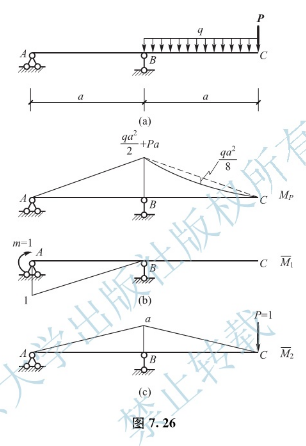


图 7.26

(3) 图形相乘。将图 7.26(a)中 M_P 图与图 7.26(b)中$\overline{M}$图相乘，则得

$$\theta_A=-\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\times a\times\left(\frac{1}{2}qa^2+Pa\right)\times\frac{1}{3}\times 1\right]$$

$$=-\frac{a}{6EI}\left(Pa+\frac{1}{2}qa^2\right)$$

结果为负值，表示 θ_A的方向与假设 $m=1$ 的方向相反，即逆时针转动。

计算 Δ_{CV}时，将图 7.26(a)与图 7.26(c)相乘，这里必须注意的是 M_P 图 BC 段的弯矩图是非标准抛物线，图乘时不能直接代入公式，应将此部分的面积分解为两部分，然后叠加，则得：

$$\Delta_{CV}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\times a\times\left(\frac{1}{2}qa^2+Pa\right)\times\frac{2a}{3}\times 2-\frac{2}{3}\times a\times\frac{1}{8}qa^2\times\frac{a}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{EI}\left(\frac{2}{3}Pa^3+\frac{7}{24}qa^4\right)(\downarrow)$$

【例 7-7】 用图乘法求图 7.27(a)所示刚架 D 点的水平位移 Δ_{DH}，已知横梁 BC 刚度为 $2EI$，柱 AB 与 CD 刚度为 EI。

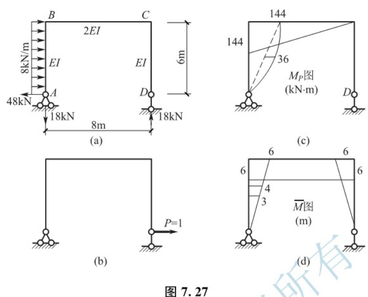


图 7.27

解：(1) 在 D 点沿水平方向设水平单位力 $P=1$，如图 7.27(b)所示。

(2) 分别作荷载作用和单位力作用下的弯矩图，如图 7.27(c)、(d)所示。

(3) 图形相乘。将图 7.27(c)与图 7.27(d)相乘，则得

$$\Delta_{DH}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\times144\times6\times4+\frac{2}{3}\times36\times6\times3\right)+\frac{1}{2EI}\times\frac{1}{2}\times144\times8\times6$$

$$=\frac{3888}{EI}(\rightarrow)$$

【例 7-8】 图 7.28(a)为一组合结构，链杆 CD、BD 的抗拉(压)刚度为 E_1A_1，受弯杆件 AC 的抗弯刚度为 E_2I_2，在结点 D 有集中荷载 P 作用。试求 D 点的竖向位移 Δ_{DV}。

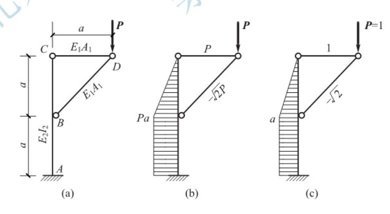


图 7.28

解：计算组合结构在荷载作用下的位移时，对链杆只有轴力影响，对受弯杆件只计弯矩影响。

(1) 在 D 点设竖向单位力 $P=1$，如图 7.28(c)所示。

(2) 分别作荷载作用和单位力作用下受弯构件的弯矩图，并计算链杆的轴力，如图 7.28(b)、(c)所示。

(3) 计算 Δ_{DV}。根据式(7－8)并利用图乘法，有

$$\Delta_{DV}=\sum\frac{Ay_C}{E_2I_2}+\sum\frac{\overline{N}N_Pl}{E_1A_1}$$
$$=\frac{1}{E_2I_2}\left(\frac{Pa^2}{2}\frac{2a}{3}+Pa^2a\right)+\frac{1\cdot P\cdot a+(-\sqrt{2})(-\sqrt{2}P)\sqrt{2}a}{E_1A_1}$$
$$=\frac{4Pa^3}{3E_2I_2}+\frac{(1+2\sqrt{2})Pa}{E_1A_1}(\downarrow)$$

7.6 静定结构温度变化时的位移计算

当静定结构的温度发生变化时，由于材料热胀冷缩，因而会使结构产生变形和位移，但由平衡条件分析得到，任意截面均不产生内力。温度变化产生的位移，同样可以采取单位荷载法计算。此时位移计算的一般公式(7－4)成为

$$\Delta=\sum\int\overline{M}\mathrm{d}\theta+\sum\int\overline{V}\gamma\mathrm{d}s+\sum\int\overline{N}\mathrm{d}\lambda \tag{a}$$

计算温度变化所产生的位移时，需要求出由于温度变化引起的微段变形，即 $\mathrm{d}\theta$、$\gamma\mathrm{d}s$、$\mathrm{d}\lambda$ 等。

现在分析实际状态中任一微段由于温度变化所产生的变形。如图 7.29(a)所示，设杆件上边缘温度上升 t_1℃。下边缘温度上升温 t_2℃，且假定 $t_2>t_1$。为简化计算，可假定温度沿杆件截面厚度 h 为线性分布，如图 7.29(b)所示，即在发生温度变形后，截面仍保持为平面。截面的变形可分解为沿轴线方向的拉伸变形 $\mathrm{d}\lambda$ 和截面的转角 $\mathrm{d}\theta$，不产生剪切变形。

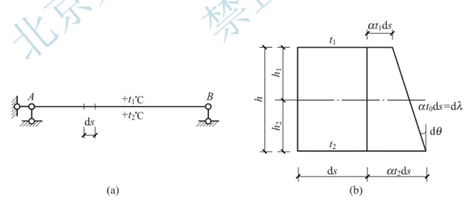


图 7.29

当杆件截面对称于形心轴时($h_1=h_2$)，其形心轴处的温度为：

$$t_0=\frac{1}{2}(t_1+t_2)$$

当杆件截面不对称于形心轴时，则有：

$$t_0=\frac{t_1h_2+t_2h_1}{h}$$

而上、下边缘的温度改变差为：

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

式中，h 为杆件截面高度；h_1、h_2 分别为杆轴至上、下边缘的距离；t_1、t_2 分别为上、下边缘温度改变值。

如材料的线膨胀系数为 α，则 $\mathrm{d}s$ 段的轴向变形 $\mathrm{d}\lambda$ 为

$$\mathrm{d}\lambda = \alpha t_0 \tag{b}$$

弯曲变形 $\mathrm{d}\theta$ 为

$$\mathrm{d}\theta = \frac{\alpha t_2 \mathrm{d}s - \alpha t_1 \mathrm{d}s}{h} \tag{c}$$

将式(b)和式(c)代入式(a)，则温度作用引起的位移计算公式为

$$\Delta = \sum \int \overline{M} \frac{\alpha \Delta t \mathrm{d}s}{h} + \sum \int \overline{N} \alpha t_0 \mathrm{d}s \tag{7-12}$$

如果各杆均为等截面杆件，则得

$$\Delta = \sum \frac{\alpha \Delta t}{h} \int \overline{M} \,\mathrm{d}s + \sum \alpha t_0 \int \overline{N} \,\mathrm{d}s$$

$$= \sum \frac{\alpha \Delta t}{h} A_{\overline{M}} + \sum \alpha t_0 A_{\overline{N}} \tag{7-13}$$

在应用式(7－12)和(7－13)时，需注意右边各项正负号的确定。由于它们都是内力所做的变形虚功，故当实际温度变形与虚拟内力方向一致时其乘积为正，相反时为负。因此，对于温度变化，若规定以升温为正，降温为负，则轴力$\overline{N}$以拉力为正，压力为负；弯矩$\overline{M}$则应以和温差Δ_t 产生同侧受拉者为正，反之为负。

对于梁和刚架，在计算温度变化所引起的位移时，一般不能略去轴向变形的影响。

对于桁架，由于只有轴力，在温度变化时，其位移计算公式为

$$\Delta = \sum \alpha t_0 \overline{N} l \tag{7-14}$$

在此，可以方便地得到当桁架的杆件长度因制造误差而与设计长度不符时，所引起的位移计算公式。设各杆长度的误差为 Δl，则

$$\Delta = \sum \overline{N} \Delta l \tag{7-15}$$

【例 7－9】 图 7.30(a)所示刚架，施工时温度为 20℃，试求冬季外侧温度为－10℃，内侧温度为 0℃时 C 点的竖向位移 Δ_{CV}。已知 $a=4\text{m}$，各杆均为矩形截面杆，高度 $h=0.4\text{m}$，$\alpha=0.00001(1/℃)$。

解：(1) 在 C 点加竖向单位荷载 $P=1$，如图 7.30(b)所示。

(2) 分别作$\overline{M}$图［图 7.30(b)］及$\overline{N}$图［图 7.30(c)］。

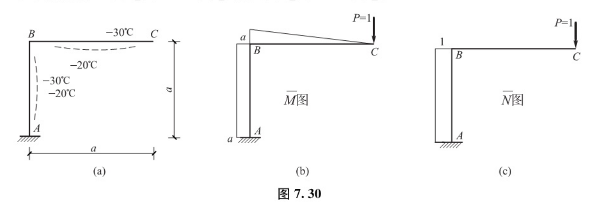


图 7.30

(3) 计算各杆件轴线处温度变化 t_0 及内外两侧温差 Δt。

$$t_0=\frac{(-10-20)+(0-20)}{2}=-25℃$$

$$\Delta t=-20-(-30)=10℃$$

(4) 代入式(7-13)得

$$\begin{aligned}\Delta_{CV}&=\sum\alpha t_0\ \overline{N}l+\sum\frac{\alpha\Delta t}{h}A_{\overline{M}}\\&=\alpha(-25)\times(-1)l-\frac{1}{h}\times\alpha\times\ 10\times\frac{1}{2}\times l\times l-\frac{1}{h}\times\alpha\times10\times l\times l\\&=-0.005\text{m}(\uparrow)\end{aligned}$$

因轴力为压力，轴线温度降低，所以上式第一项乘积为正。因 Δt 与$\overline{M}$所产生的弯曲方向相反，所以第二项取负号。结果为负，说明当温度变化如图 7.30 (a)所示时，C 点的实际竖向位移方向向上。

7.7 静定结构支座移动时的位移计算

静定结构当支座移动时，并不使结构产生内力或引起应变，而使结构只发生刚体位移，如图 7.31(a)所示。因此，当用单位荷载法计算时，式(7-4)简化为

$$\Delta=-\sum\overline{R}_i\cdot C_i \tag{7-16}$$

式中，C_i 为实际支座的位移；$\overline{R}_i$为虚设单位力作用时的支座反力，与 C_i 对应，如图 7.31 (b)所示。两者方向一致时，乘积为正，反之为负。

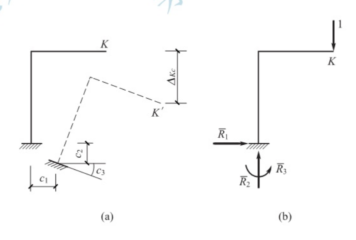


图 7.31

用单位荷载法计算支座移动引起的位移步骤如下。

(1) 沿拟求位移 Δ 方向虚设相应的单位力。

(2) 根据静力平衡条件求单位力作用下相应于支座移动 C_i 的支座反力$\overline{R}_i$。

(3) 由式(7-16)计算 Δ。

【例 7-10】 如图 7.32(a)所示的三铰刚架，右边支座发生竖向位移为 $\Delta_{By}=0.06\text{m}$，水平位移 $\Delta_{Bx}=0.04\text{m}$，已知 $l=12\text{m}$，$h=8\text{m}$。试求由此引起的 A 端转角 θ_A。

解：(1) 在 A 处虚设单位力偶 $M=1$，如图 7.32(b)所示。

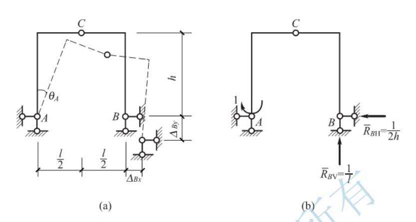


图 7.32

(2) 根据静力平衡条件计算 B 处单位力偶作用下相应的支座反力，如图 7.32(b)所示。

(3) 由式(7-16)计算求 θ_A：

$$\theta_A=-\sum\overline{R}_i\cdot C_i=-\left(-\frac{1}{l}\Delta_{By}-\frac{1}{2h}\Delta_{Bx}\right)=\frac{0.06}{12}+\frac{0.04}{2\times 8}=0.0075\text{rad}$$

与单位力偶转向相同，为顺时针转向。

7.8 线弹性结构的互等定理

本节介绍线弹性结构的三个互等定理，即功的互等定理、位移互等定理和反力互等定理，这些定理在以后的章节中要经常应用。三个互等定理中最基本的是功的互等定理，其他两个定理都可由此推导出来。

1. 功的互等定理

设有两组外力 P_1 和 P_2 分别作用于同一线弹性结构上，如图 7.33(a)、(b)所示，分别称为结构的状态Ⅰ和状态Ⅱ。如果来计算状态Ⅰ的外力在状态Ⅱ相应的位移上所做的虚功 W_{12}，根据虚功原理，则有

$$W_{12}=\sum P_1\Delta_{12}=\sum\int\frac{M_1M_2}{EI}\text{d}s+\sum\int\frac{kV_1V_2}{GA}\text{d}s+\sum\frac{N_1N_2}{EA}\text{d}s \tag{7-17}$$

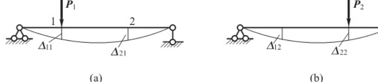


图 7.33

这里，位移Δ_{12}的两个下标的含义：第一个下标1表示位移的位置和方向，即该位移是P_1作用点沿P_1方向上的位移；第二个下标2表示产生位移的原因，即该位移是由P_2所引起的。

同理，计算状态Ⅱ的外力在状态Ⅰ相应的位移上所做的虚功W_{21}，则有

$$W_{21}=\sum P_2\Delta_{21}=\sum\int\frac{M_2M_1}{EI}\mathrm{d}s+\sum\int\frac{kV_2V_1}{GA}\mathrm{d}s+\sum\frac{N_2N_1}{EA}\mathrm{d}s \tag{7-18}$$

由于式(7-17)和式(7-18)的右边彼此相等，所以：

$$\sum P_1\Delta_{12}=\sum P_2\Delta_{21} \tag{7-19}$$

或写成：

$$W_{12}=W_{21} \tag{7-20}$$

这表明，同一结构的两种不同状态之间具有如下关系，即状态Ⅰ的所有外力在状态Ⅱ相应位移上所做的总虚功，等于状态Ⅱ的所有外力在状态Ⅰ相应位移上所做的总虚功。这就是功的互等定理。

2. *位移互等定理*

现在用上述功的互等定理来研究一种特殊情况。如图7.34所示，状态Ⅰ中只有一个单位荷载P=1，状态Ⅱ中也只有一个单位荷载$P_2=1$。由功的互等定理(7-19)可得

$$1\cdot\Delta_{12}=1\cdot\Delta_{21}$$

即

$$\Delta_{12}=\Delta_{21}$$

此时，Δ_{12}和Δ_{21}都是由单位力引起的，为区别起见，改用小写δ_{12}、δ_{21}表示，则有

$$\delta_{12}=\delta_{21} \tag{7-21}$$

图7.34

这就是位移互相定理：在第一单位力作用点沿其方向上由第二个单位力作用所引起的位移δ_{12}，等于第二个单位力作用点沿其方向上由第一个单位力作用所引起的位移δ_{21}。

3. *反力互等定理*

反力互等定理也是功的互等定理的一个特殊情况。它用来说明在同一超静定结构中假设两个支座分别产生位移时，两个状态中反力的互等关系。图7.35(a)表示支座1发生单位位移$\Delta_1=1$的状态，此时使支座2产生的反力为k_{21}；图7.35(b)表示支座2发生单位位移$\Delta_2=1$的状态，此时使支座1产生的反力为k_{12}。根据功的互等定理，有

$$k_{21}\cdot\Delta_2=k_{12}\cdot\Delta_1$$

现有$\Delta_1=\Delta_2=1$，则

$$k_{21}=k_{12} \tag{7-22}$$

这就是反力互等定理。它表明：支座1发生单位位移所引起的支座2的反力，等于支座2发生单位位移所引起的支座1的反力。

支座反力k_{ij}有两个下标，第一个下标i表示支座反力所在的位置，第二个下标j表示产生反力的单位位移所在位置。

这一定理对结构上任何两个支座都适用，但应注意反力与位移在做功的关系上应相对

应，即力对应于线位移，力偶对应于角位移。例如，在图 7.36(a)、(b)的两个状态中，应有 $k_{21}=k_{12}$，它们虽然一个为单位线位移引起的反力偶，一个为单位转角引起的反力，含义不同，但此时两者在数值上是相等的，量纲也相同。

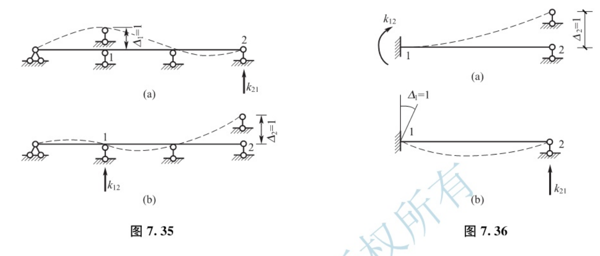


图 7.35　　　图 7.36

另外，根据功的互等定理还可推证出反力位移互等定理。读者可参考有关书籍。

本 章 小 结

本章首先介绍了弹性体的虚功原理，主要应用虚设力状态求实际位移状态的位移。

然后学习了结构位移计算的一般公式：

$$\Delta_{KP}=-\sum \overline{F}_{R}c+\sum\int_l \frac{\overline{M}M_P}{EI_z}\mathrm{d}x+\sum\int_l \frac{k\overline{F}_S F_{SP}}{GA}\mathrm{d}x+\sum\int_l \frac{\overline{F}_N F_{NP}}{EA}\mathrm{d}x$$

公式中的第一项是由支座移动引起的位移；第二项是由弯曲引起的位移，对于梁和刚架经常仅用此项结果计算位移；第三项是由剪切引起的位移，一般只有在构件的高跨比较大时才考虑这项影响，通常不计这一因素；第四项是由轴向变形所引起的位移，桁架位移计算仅用此项，组合结构中的桁架杆要考虑这一项，弯曲杆要考虑第二项；拱结构在考虑第二项的同时有时还要考虑第四项。

对于以弯曲变形为主的梁和刚架(忽略轴力和剪力的影响，直杆)，计算由荷载所引起的位移时，可用图乘法求其位移：

$$\Delta_{KP}=\sum\frac{A_\omega y_C}{EI_z}$$

图乘法是本章学习的重点。

对于非荷载因素引起的位移，主要介绍了支座移动引起的位移：

$$\Delta_{Kc}=-\sum\overline{F}_{R}c$$

温度变化引起的位移为

$$\Delta_{Kt}=\sum(\pm)\frac{\alpha\Delta t}{h}A_{\overline{M}}+\sum(\pm)\alpha t_0 A_{\overline{N}}$$

最后，本章还介绍了功的互等定理、位移互等定理和反力互等定理，在后续的超静定结构计算中，将会应用到这些定理。

关键术语

位移(displacement)；挠度(deflection)；线位移(linear displacement)；角位移(angular displacement)；广义力(generalized force)；广义位移(generalized displacement)；应变能(strain energy)；虚功原理(principle of virtual work)；积分法(method of integration)；图乘法(diagram multiplication method)；支座移动(variation of supports)；互等定理(reciprocal theorems)；功的互等定理(reciprocal work theorem)；位移互等定理(reciprocal displacement theorem)；反力互等定理(reciprocal reaction theorem)。

习 题 7

一、思考题

1. 没有变形就没有位移，此结论正确吗？
2. 图乘法的应用条件是什么？变截面杆件和曲杆是否可用图乘法？
3. 用图乘法应如何确定乘积的正负号？
4. 图7.37所示M_i、$\overline{M}$图都是梯形，下列图乘算法是否正确？

$$\int M_i \overline{M} \mathrm{d}x = A_1 y_1 + A_2 y_2$$

5. 图7.38所示M_P、$\overline{M}$图分别是抛物线和三角形，下列算法是否正确？

$$\int M_P \overline{M} \mathrm{d}x = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot l\right) \times \frac{l}{4}$$

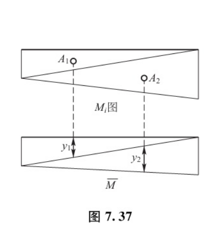


图7.37

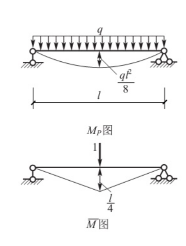


图7.38

6. 对于图 7.39 所示结构的 M_P、$\overline{M}$图，下列算法是否正确？

$$\int M_P \overline{M} \mathrm{d}x = \left(\frac{1}{3} \cdot ql^2 \cdot l\right) \times \frac{3l}{4}$$

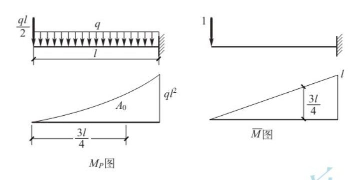


图 7.39

7. 在温度变化引起的位移计算公式中，如何确定各项的正负号？

8. 试用图 7.40 所示两种情况，说明位移互等定理，并说明 δ_{12} 和 δ_{21} 的物理意义。

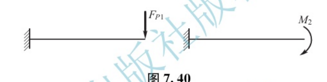


图 7.40

二、填空题

1. 结构变形是指结构的________发生改变，结构的位移是指结构某点的________发生改变，其位移又分为________位移、________位移。

2. 如图 7.41 所示的桁架，EA=常数，D、E 两点的相对水平位移为________。

3. 图 7.42 所示结构 B 点的竖向位移 Δ_{By} 为___________。

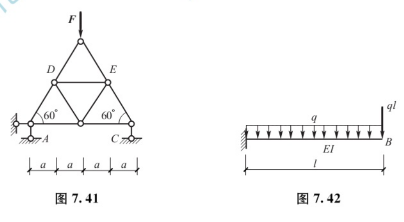


图 7.41　　图 7.42

4. 静定结构中的杆件在温度变化时只产生________，不产生________，在支座移动时只产生________，不产生内力与________。

5. 计算刚架在荷载作用下的位移，一般只考虑________变形的影响，当杆件较短粗时还应考虑________变形的影响。

6. 应用图乘法求杆件结构的位移时，图乘的杆段必须满足如下三个条件：________________；________________；________________。

7. 虚功原理应用条件是：力系满足____________条件；位移是________的 。

8. 图乘公式$\sum\int \overline{M}M_P \mathrm{d}s/EI = \sum \pm A_{\omega} y_C/EI$ 中，当____________时取正号；当____________时取负号。

9. 虚位移原理是在给定力系与__________之间应用虚功方程；虚力原理是在__________与给定位移状态之间应用虚功方程。

三、判断题

1. 静定结构中由于支座移动和温度影响产生位移时不产生内力。(　　)

2. 虚功中的力状态和位移状态是彼此独立无关的，这两个状态中的任一个都可看作是虚设的。(　　)

3. 应用虚力原理求体系的位移时，虚设力状态可在需求位移处添加相应的非单位力，亦可求得该位移。(　　)

4. 用图乘法可求得各种结构在荷载作用下的位移 。(　　)

5. 在荷载作用下，刚架和梁的位移主要由各杆的弯曲变形引起的。(　　)

6. 若刚架中各杆均无内力，则整个刚架不存在位移。(　　)

7. 图 7.43 所示梁的跨中挠度为零。(　　)

8. 图 7.44 所示 M_P、$\overline{M}_k$图，用图乘法求位移的结果为：$(\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2)/EI$。(　　)

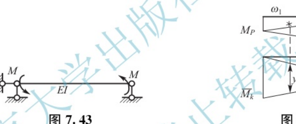


图 7.43　　　　图 7.44

9. 在非荷载因素(支座移动、温度变化、材料收缩等)作用下，静定结构不产生内力，但会有位移且位移只与杆件相对刚度有关。(　　)

四、选择题

1. 四个互等定理适用于(　　)。

A. 刚体　　B. 变形体　　C. 线性弹性体系　　D. 非线性体系

2. 如图 7.45 所示结构，求 A、B 两点相对线位移时，虚力状态应在两点分别施加的单位力为(　　)。

A. 竖向反向力　　B. 水平反向力

C . 连线方向反向力　　D. 反向力偶

3. 图 7.46 所示结构 A 截面转角(设顺时针为正)为(　　)。

A. $2Fa^2/EI$　　B. $-Fa^2/EI$　　C. $5Fa^2/(4EI)$　　D. $-5Fa^2/(4EI)$

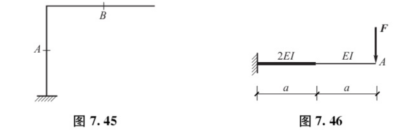


图 7.45　　　　图 7.46

4. 图 7.47 所示结构(EA=常数)，C 点的竖向位移(向下为正)为(　　)。

A. $1.914Pa^2/EA$　　B. $1.914Pa/EA$

C. $-1.914Pa^2/EA$　　D. $-1.914Pa/EA$

5. 图 7.48 所示刚架 A 支座下移量为 a，转角为 α，则 B 端竖向位移大小(　　)。

A. 与 h、l、E、I 均有关　　B. 与 h、l 有关，与 E、I 无关

C. 与 l 有关，与 h、E、I 无关　　D. 与 E、I 有关，与 h、l 无关

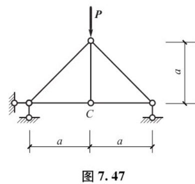


图 7.47

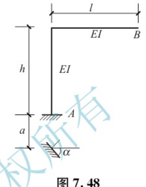
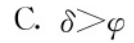


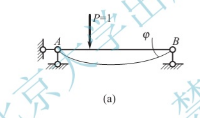
图 7.48

6. 图 7.49(a)、(b)所示的两种状态中，梁的转角 φ 与竖向位 δ 间的关系为(　　)。

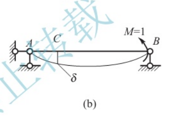
A. $\delta=\varphi$　　B. δ 与 φ 关系不定，取决于梁的刚度大小

C. $\delta>\varphi$　　D. $\delta<\varphi$





(a)



(b)

图 7.49

7. 欲求图 7.50 所示各结构中的 A 点竖向位移，能用图乘法的为(　　)。

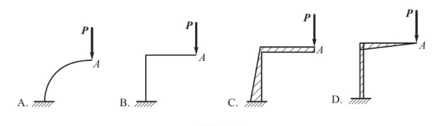


图 7.50

8. 按虚力原理所建立的虚功方程等价于(　　)。

A. 静力方程　　B. 物理方程　　C. 平衡方程　　D. 几何方程

9. 静定结构的位移与 EA、EI 的关系是(　　)。

A. 无关　　B. 相对值有关

C. 绝对值有关　　D. 与 E 无关，与 A、I 有关

10. 静定结构在温度改变时，结构(　　)。

A. 无变形，无位移，无内力　　B. 有变形，有内力，有位移

C. 有变形，有位移，无内力　　D. 无变形，有位移，无内力

11. 对组合结构进行位移计算时(　　)。

A. 仅考虑弯矩作用　　B. 仅考虑轴力作用

C. 考虑弯矩和剪力作用　　D. 考虑弯矩和轴力作用

12. 图 7.51 所示结构截面 A 的转角为(　　)。

A. $\frac{qa^3}{2EI}$(逆时针)　　B. $\frac{2qa^3}{EI}$(顺时针)

C. $\frac{4qa^3}{EI}$(顺时针)　　D. $\frac{1.5qa^3}{EI}$(逆时针)

13. 等截面刚架，矩形截面高 $h=a/10$，材料的线膨胀系数为 α，在图 7.52 所示温度变化下，C 点的竖向位移 Δ_{Cy} 之值为(　　)。

A. $80.5a\alpha$(↑)　　B. $60a\alpha$(↓)　　C. $68a\alpha$(↑)　　D. $72a\alpha$(↓)

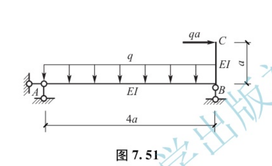


图 7.51

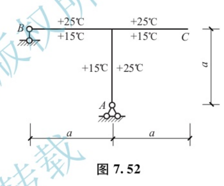


图 7.52

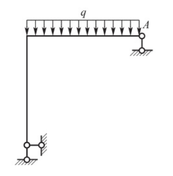
14. 图 7.53 所示刚架的 EI=常数，各杆长为 l，A 截面的转角为(　　)。

A. $ql^3/(24EI)$(逆时针)　　B. $ql^3/(24EI)$(顺时针)

C. $ql^3/(12EI)$(顺时针)　　D. $ql^3/(6EI)$(逆时针)

15. 在图 7.54 所示的结构中，A 点竖向位移 Δ_{Ay}=(　　)。

A. $\frac{31ql^4}{24EI}$(↓)　　B. $\frac{31ql^4}{24EI}$(↑)　　C. $\frac{33ql^4}{24EI}$(↓)　　D. $\frac{33ql^4}{24EI}$(↑)



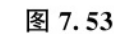


图 7.53

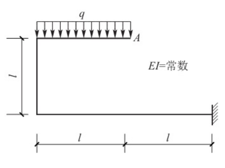


图 7.54

16. 如图 7.55 所示的结构(EI=常数)中，D 点水平位移(向右为正)为(　　)。

A. $-qa^4/(3EI)$　　B. $-qa^4/(6EI)$　　C. $qa^4/(6EI)$　　D. $qa^4/(3EI)$

17. 图 7.56 所示结构的 B 支座发生移动，D 点的水平位移(向右为正)为(　　)。

A. $-\frac{c_1+c_2}{2}$　　B. $-\frac{c_1-c_2}{2}$　　C. $\frac{c_1-c_2}{2}$　　D. $\frac{c_1+c_2}{2}$

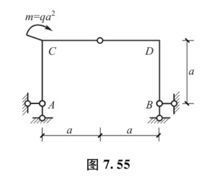


图 7.55

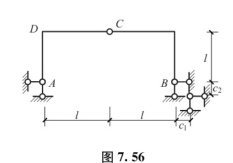


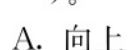
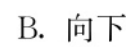
图 7.56

18. 图 7.57 所示刚架，各杆 EI 相同。C 点的竖向位移(向下为正)等于(　　)。

A. $5ql^4/(384EI)$　B. $ql^2/(48EI)$　C. $ql^4/(48EI)$　D. $ql^3/(3EI)$

19. 图 7.58 所示组合结构，梁式杆件的 EI=常数，桁架杆件 EA=常数，C 点竖向位移为(　　)。

A. 向上　B. 向下　C. 为零　D. 需计算确定

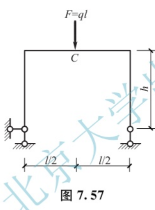




图 7.57

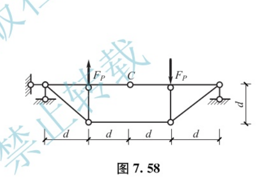


图 7.58

五、计算题

1. 试用积分法求图 7.59 所示悬臂梁 A 点的竖向位移和转角位移。EI=常数。

2. 试用积分法求图 7.60 所示刚架 B 点的水平位移。EI=常数。

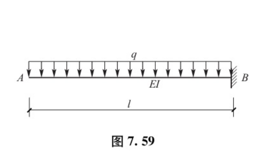


图 7.59

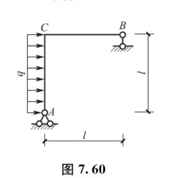


图 7.60

3. 图 7.61 所示桁架各杆截面均为 $A=2\times10^{-3}\text{m}^2$，$E$=210GPa，试求 C 点的竖向位移。

4. 试求图 7.62 所示桁架 D 点的水平位移。各杆 EA 相等。

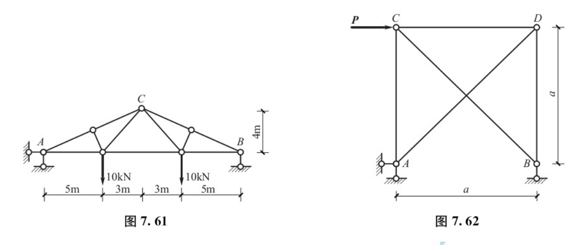


图 7.61

图 7.62

5. 试求图 7.63 所示半圆曲梁 B 点的水平位移。只记弯曲变形，EI＝常数。

6. 用图乘法计算图 7.59、图 7.60 的位移。

7. 用图乘法求结构的指定位移：(1)求图 7.64 的最大挠度；(2)求图 7.65C 点的竖向位移；(3)求图 7.66B 点的转角；(4) 求图 7.67A 点的水平位移、D 点的竖向位移；(5)求图 7.68C、D 两点的距离改变；(6)求图 7.69C 点的竖向位移、C 点左右两侧的相对转角。

图 7.63

图 7.64

图 7.65

图 7.66

图 7.67

图 7.68

图 7.69

8. 图 7.70 所示组合结构，横梁 AD 为工字钢，惯性矩 $I=3400\text{cm}^4$，拉杆 BC 为直径 20mm 的圆钢，材料弹性模量 $E=210\text{GPa}$，$q=6\text{kN/m}$，$a=3\text{m}$。试求 D 点的竖向位移。

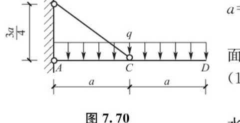


图 7.70

9. 设三铰刚架温度变化量如图 7.11 所示，各杆截面为矩形，截面高度相同，$h=60\text{cm}$，$\alpha=0.00001(1/℃)$。求 C 点的竖向位移。

10. 求图 7.72 所示刚架因温度改变引起的 D 点的水平位移。已知各杆由 18 号工字钢组成，截面高度 $h=18\text{cm}$，$\alpha=0.00001(1/℃)$。

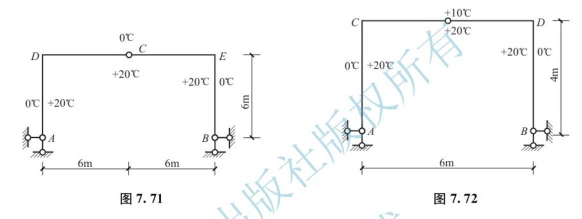


图 7.71　　图 7.72

11. 求图 7.73 所示结构 D 点水平位移。(1)设支座 A 向左移动 1cm；(2)设支座 B 下沉 1cm。

12. 设支座 A 产生如图 7.74 所示位移，试求 K 点的竖向位移、水平位移和转角位移。

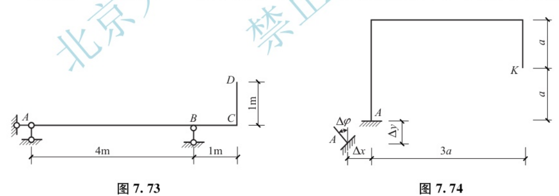


图 7.73　　图 7.74

13. 设多跨梁支座 A 产生如图 7.75 所示移动，试求 D 点的竖向位移。

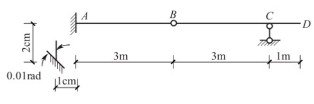


图 7.75

第8章 力 法

本章教学要点

知识模块	掌握程度	知识要点
荷载作用时超静定结构的计算	掌握	超静定结构的组成和超静定次数的确定
	掌握	力法的典型方程
	熟悉	对称性的利用
非荷载作用时超静定结构的计算	理解	支座移动和温度变化时超静定结构的计算

本章技能要点

技能要点	掌握程度	应用方向
超静定次数的确定	掌握	建立基本结构
力法方程的应用	掌握	计算内力、绘制内力图
对称性的利用	熟悉	简化计算



一个倒塌的建筑

20世纪，我国北方某城市的一幢四层楼的建筑，在主体工程完成后对模板进行拆卸时，楼房突然坍塌，造成了死伤多人的重大损失。事故发生后，有关部门对结构设计和施工质量进行了调查。发现，在结构设计中的力学计算方面存在严重错误：对本应是超静定结构的计算，采用了静定结构的计算方法。

该工程每层主梁的计算简图可由图8.1(a)表示，为多一个联系的几何不变体，是一次超静定结构。因此，其各支座的反力和内力是不能仅由静力平衡条件求出的。但是，设计者错误地将其按照图8.1(b)所示的静定结构进行计算，特别是对中间支座(混凝土柱)反力的计算，使该数值比准确值少了12.5%。

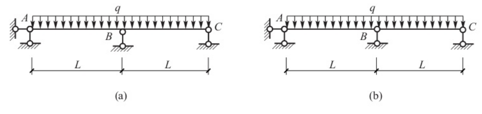


图8.1

导致该工程发生破坏的另一原因是施工质量非常差，柱子内的混凝土出现了骨料分离的现象，所以该混凝土柱的破坏是在所难免的。

本章将学习超静定结构反力、内力计算的基本方法，得出超静定结构反力、内力的正确结果，以保证结构的安全。

8.1 超静定结构的组成和超静定次数的确定

1. 超静定结构的组成

在前面几章中，讨论了静定结构的内力和位移计算，从本章起开始讨论超静定结构的计算。

前已述及，一个结构，如果它的支座反力和各截面的内力都可以用静力平衡条件唯一地确定，就称为静定结构。图 8.2(a)所示简支梁是一个静定结构，为了增大简支梁的刚度和强度，对简支梁 AB 增加一个支座链杆 C，就得到图 8.2(b)所示的连续梁，它的支座反力和各截面的内力不能完全由静力平衡条件唯一地加以确定，这样的结构就称为超静定结构。

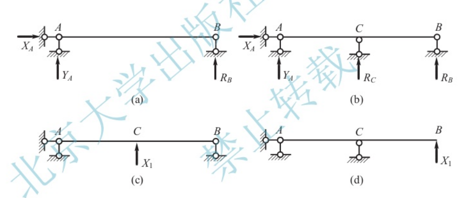


图 8.2

从几何组成角度分析，简支梁和连续梁都是几何不变体系。但简支梁无多余约束，而连续梁有多余约束。由此引出如下结论：静定结构是没有多余约束的几何不变体系，而超静定结构则是有多余约束的几何不变体系。

所谓多余约束是对保持体系的几何不变性而言，它不是必要的。超静定结构中把哪个约束视为多余约束，并不是固定不变的。如图 8.2(b)中，除水平链杆外，A、B、C 三根竖向链杆中的任何一根均可视为多余约束。多余约束中产生的力称为多余未知力。若把竖向链杆 C 看作多余约束，则其多余未知力就是 R_C，若把竖向链杆 B 看作多余约束，则其多余未知力就是 R_B，在力法中多余未知力都用 X_i($i=1$，2，…，n)表示，见图 8.2(c)、(d)。

总的来说，反力或内力是超静定的，有多余的约束，这就是超静定结构区别于静定结构的基本特征。

工程中常见的超静定结构的类型有：超静定梁［图 8.3(a)］、超静定刚架［图 8.3(b)］、超静定拱［图 8.3(c)］、超静定桁架［图 8.3(d)］及超静定组合结构［图 8.3(e)］等。

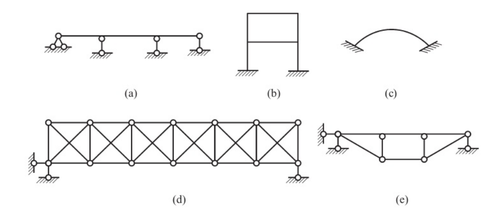


图 8.3

2. 超静定次数的确定

从几何组成分析方面看，超静定次数是指超静定结构中多余约束的个数。如果从原结构中去掉 n 个约束，结构就成为静定的，则原结构即为 n 次超静定结构。

显然，为了确定结构的超静定次数，就可以用去掉多余约束使原结构变成静定结构的方法来进行。去掉多余约束的方式，通常有以下几种：

(1) 去掉一根支座链杆(支杆)或切断一根链杆，相当于去掉一个约束 [图 8.4(a)、(b)]；

(2) 去掉一个铰支座或去掉一个单铰，相当于去掉两个约束 [图 8.4(c)、(d)]；

(3) 去掉一个固定端或切断一个梁式杆，相当于去掉三个约束 [图 8.4(e)]；

(4) 将刚结改为单铰连接，相当于去掉一个约束 [图 8.4(f)]。

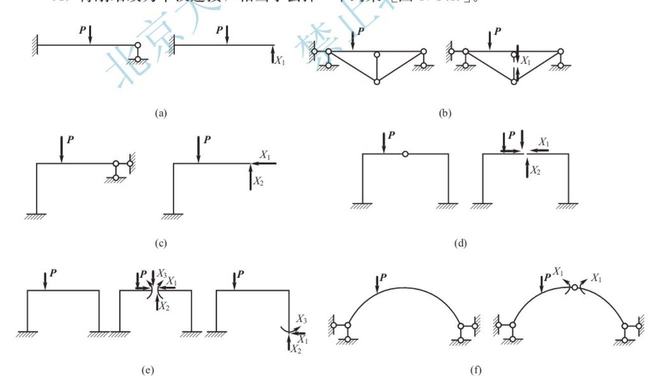


图 8.4

应用上述去掉多余约束的方式，可以确定任何结构的超静定次数。例如图 8.5(a)所示结构，在去掉单铰、切断链杆和梁式杆后，将得到图 8.5(b)所示静定结构，所以原结构为 6 次超静定。

对于同一个超静定结构，可以采取不同的方式去掉多余约束，而得到不同的静定结构，但是所去多余约束的数目总是相同的，即超静定次数相同。例如对于上述结构，还可以按图 8.5(c)、(d)等方式去掉多余约束，但都将表明原结构是 6 次超静定的。

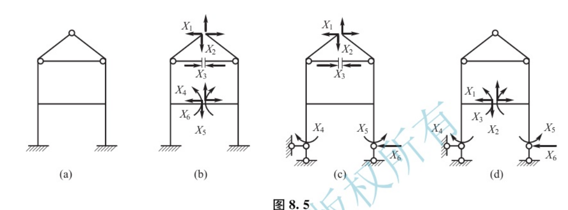


图 8.5

此外，在去掉多余约束时，还要注意：

(1) 不要把原结构去成一个几何可变体系。例如，如果把图 8.6(a)所示结构中的水平支杆拆掉，这样就变成了几何可变体系；

(2) 内外多余约束都要去掉。如图 8.6(a)所示结构，如果只去掉一根竖向支杆，如图 8.6(b)所示，则其中的闭合框仍然具有三个多余约束。因此，必须把闭合框再切开一个截面，如图 8.6(c)所示，这时才成为静定结构。所以，原结构共有四个多余约束。

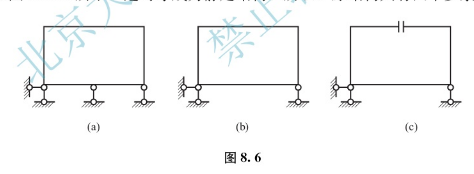


图 8.6

8.2 力法的基本概念

力法是计算超静定结构的最基本方法。力法的基本思路是把超静结构的计算问题转化成静定结构的计算问题，即利用我们已经掌握的静定结构的计算方法来达到计算超静定结构的目的。

1. 力法的基本未知量和基本体系

1) 力法的基本未知量

图 8.7(a)所示为一两跨连续梁，它是具有一个多余约束的超静定结构。若将支座 B

处的支杆作为多余约束，在去掉该约束并代以一个相应的多余未知力 X_1 后，则得到图 8.7(b)所示的简支梁。如果能设法把多余未知力 X_1 计算出来，剩下的问题就是简支梁的计算问题，从而将超静定结构的计算问题转化为静定结构的计算问题。由此可见，求解超静定结构的关键问题是计算多余未知力，我们把处于关键地位的多余未知力称为力法的基本未知量。

2）力法的基本体系

在超静定结构中，去掉多余约束所得到的静定结构称为力法的基本结构(在特殊情况下也可以选择超静定的基本结构，本章只讨论静定的基本结构)，图 8.7(c)所示的静定结构即为原结构［图 8.7(a)］的基本结构。基本结构在荷载和多余未知力共同作用下的体系称为力法的基本体系，图 8.7(b)为 8.6(a)的基本体系。可以看出，基本体系本身既是静定结构，又可用它代替原结构。因此，它是将超静定结构的计算问题转化为静定结构的计算问题的一座桥梁。

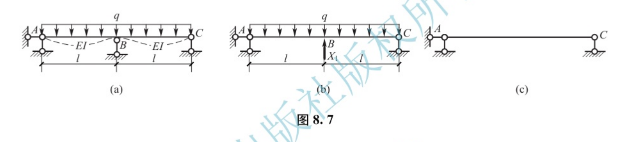


图 8.7

2. 力法的基本方程

现在我们讨论如何求出基本未知量 X_1。我们知道不论 X_1 为任何值，基本体系都保持平衡。显然，基本未知量 X_1 不能利用平衡条件求出，必须补充新的条件。

在力法中，我们以基本体系作为桥梁计算原结构。前面已经说明了如何把原结构转化为基本体系，现在需要说明如何使基本体系等效于原结构。为此，将原结构与基本体系加以比较。

在原结构［图 8.7(a)］中，B 处的支座反力 R_B 是被动力，是一个固定值。与 R_B 相应的位移(即 B 点的竖向位移)等于零。在基本体系［图 8.7(b)］中，多余未知力 X_1 是主动力，是变量。如果 X_1 过大，则简支梁上的 B 点往上移；如果 X_1 过小，则简支梁上的 B 点往下移。只有当简支梁上的 B 点竖向位移正好等于零时，基本体系中的多余未知力 X_1(变力)与原结构中支座反力 R_B(常力)相等，基本体系受力状态和变形状态与原结构完全相同，这时基本体系才等效于原结构。

由此看出，基本体系等效于原结构的条件是：基本体系沿多余未知力 X_1 方向的位移 Δ_1 应与原结构相同，即

$$\Delta_1=0 \tag{a}$$

上式是一个变形条件或称位移条件，也就是计算多余未知力 X_1 时所需要的补充条件。

下面只讨论线性变形体的情形。设以 Δ_{11} 和 Δ_{1P} 分别表示多余未知力 X_1 和荷载 q 单独作用在基本结构上时，B 点沿 X_1 方向上的位移，如图 8.8(b)、(c)所示，并规定位移与所设 X_1 方向相同者为正，两个下标的含义与第 7 章所述相同，即第一个下标表示位移的位置和方向，第二个下标表示产生位移的原因。根据叠加原理，变形条件式(a)可写为：

$$\Delta_{11}+\Delta_{1P}=0 \tag{b}$$

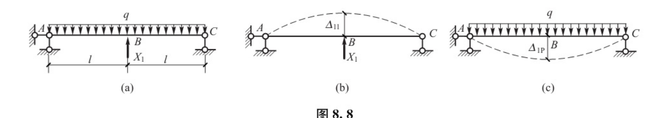


图 8.8

为从(b)式求得多余未知力 X_1，应先从寻找 X_1 和 Δ_{11} 之间的关系入手。不妨先令 $X_1=1$，它引起的 X_1 方向上的位移用 δ_{11} 表示［图 8.9(b)］，则有

$$\Delta_{11}=\delta_{11}X_1 \tag{c}$$

将式(c)代入式(b)，有

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0 \tag{8-1}$$

这就是在线性变形条件下一次超静定结构的力法基本方程，简称为力法方程。

在力法基本方程式(8-1)中，δ_{11} 称为方程的系数，Δ_{1P} 称为方程的自由项。由于 δ_{11} 和 Δ_{1P} 是静定结构在已知力作用下的位移，可用单位荷载法计算，求得 δ_{11} 和 Δ_{1P} 后，即可根据式(8-1)求得基本未知量 X_1。

为了计算 δ_{11} 和 Δ_{1P}，作基本结构在荷载作用下的 M_P 图［图 8.9(a)］和在单位力 $X_1=1$ 作用下的 $\overline{M}_1$ 图［图 8.9(b)］。然后用图乘法计算这些位移。求 δ_{11} 时应为 $\overline{M}_1$ 图乘 $\overline{M}_1$ 图，称为 $\overline{M}_1$ 图“自乘”：

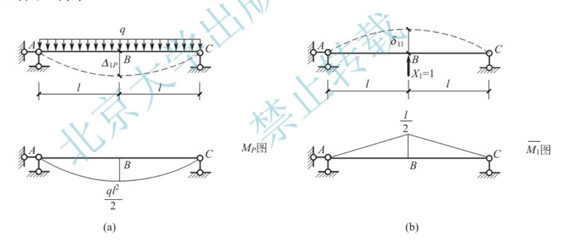


图 8.9

$$\delta_{11}=\int\frac{\overline{M}_1\overline{M}_1}{EI}\mathrm{d}x=\frac{2}{EI}\left[\frac{1}{2}\times l\times\frac{l}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{l}{2}\right]=\frac{l^3}{6EI}$$

求 Δ_{1P} 则为 $\overline{M}_1$ 图与 M_P 图相乘：

$$\Delta_{1P}=\int\frac{\overline{M}_1M_P}{EI}\mathrm{d}x=\frac{2}{EI}\left[-\frac{2}{3}l\times\frac{ql^2}{2}\times\frac{5}{8}\times\frac{l}{2}\right]=-\frac{5ql^4}{24EI}$$

将 δ_{11} 和 Δ_{1P} 代入式(8-1)可求得

$$X_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=-\left(-\frac{5ql^4}{24EI}\right)\Big/\left(\frac{l^3}{6EI}\right)=\frac{5}{4}ql(\uparrow)$$

所得 X_1 为正值，表明 X_1 的实际方向与原假定方向相同。

求出多余未知力 X_1 后，即可按静力平衡条件求得其余反力和内力，作内力图，计算

结果见图 8.10。

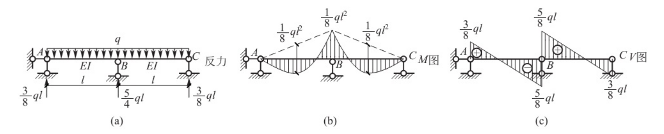


图 8.10

结构任一截面的弯矩 M 也可按叠加原理由下式求得：

$$M=\overline{M_1}X_1+M_P \tag{8-2}$$

即将$\overline{M_1}$图的竖标乘以 X_1 倍，再与 M_P 图的对应竖标相加，就可绘出 M 图。

像上述这样以多余未知力为基本未知量，以去掉多余约束后得到的静定结构作为基本结构，根据基本体系应与原结构变形相同的条件建立力法方程，从而求解多余未知力，然后由平衡条件即可计算其余反力、内力的方法，称为力法。可以用力法来分析任何类型的超静定结构。

图 8.10 即是导入案例中所述倒塌建筑的计算简图，设计人员按两个 l 长的简支梁近似计算 B 支座的反力为 ql ，每一层都比实际受力少了 $1/4ql$，又由于施工质量也很差，致使该工程在拆卸模板时整个建筑坍塌。

8.3 力法的典型方程

8.2 节以一次超静定结构为例说明了力法的基本概念。可以看出，用力法计算超静定结构的关键，在于根据变形条件建立力法方程以求解多余未知力。对于多次超静定结构，其计算原理与一次超静定结构的基本相同。下面结合一个三次超静定的刚架来进一步说明用力法解多次超静定结构的原理和力法典型方程的建立。

1. 三次超静定结构的力法方程

图 8.11(a)所示为三次超静定刚架，分析时必须去掉它的三个多余约束。若把固定端 B 看作多余约束，将其去掉并以相应的多余未知力 X_1、X_2 和 X_3 代替所去掉约束的作用，则得到如图 8.11(b)所示的基本体系。现在用此基本体系建立力法方程，这就要使基本体系与原结构在变形上完全一致。在原结构中，由于 B 端为固定支座，所以没有水平位移、竖向位移和角位移，因此基本结构在荷载和多余未知力 X_1、X_2、X_3 共同作用下，B 点沿 X_1 方向的位移 Δ_1(水平位移)、沿 X_2 方向的位移 Δ_2(竖向位移)和沿 X_3 方向的位移 Δ_3(转角)应该分别等于零。即位移条件为

$$\Delta_1=0,\ \Delta_2=0,\ \Delta_3=0 \tag{a}$$

设各单位多余未知力 $X_1=1$、$X_2=1$、$X_3=1$ 和荷载(P_1、P_2)分别作用于基本结构上时，B 点沿 X_1 方向的位移分别为 δ_{11}、δ_{12}、δ_{13} 和 Δ_{1P}，沿 X_2 方向的位移分别为 δ_{21}、δ_{22}、δ_{23} 和 Δ_{2P}，沿 X_3 方向的位移分别为 δ_{31}、δ_{32}、δ_{33} 和 Δ_{3P} [图 8.11(c)、(d)、(e)、(f)]。则

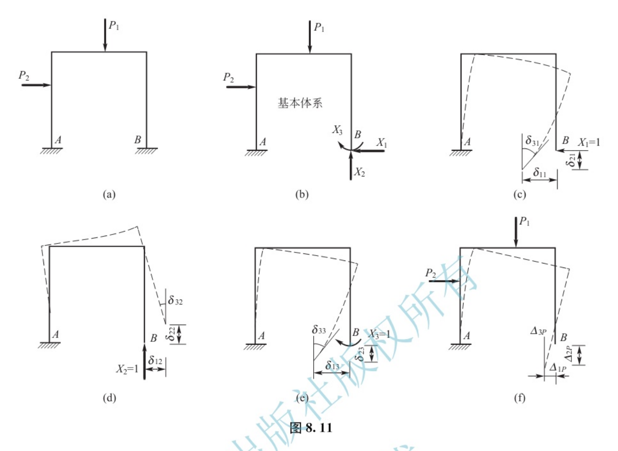


图 8.11

根据叠加原理可将位移条件式(a)写为：

$$\begin{aligned}\Delta_1&=\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{13}X_3+\Delta_{1P}=0\\\Delta_2&=\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{23}X_3+\Delta_{2P}=0\\\Delta_3&=\delta_{31}X_1+\delta_{32}X_2+\delta_{33}X_3+\Delta_{3P}=0\end{aligned}\tag{8-3}$$

这就是三次超静定结构的力法基本方程。它与一次超静定的力法方程比较主要增加了未知力之间的相互影响。

式(8－3)力法方程中的系数和自由项都是基本结构的位移，即静定结构的位移，均可采用单位荷载法计算。求解这一方程组便可求得多余未知力 X_1、X_2 和 X_3。

应当说明，对于同一结构，可以按不同的方式选取力法的基本结构和基本未知量，如图 8.11(a)所示的结构，其基本结构也可用图 8.12(a)、(b)、(c)所示的基本结构，这时力法方程在形式上与式(8－3)完全相同。但由于 X_1、X_2 和 X_3 的实际含义不同，因而变形条件的含义也不同。此外，还须注意，基本结构必须是几何不变的，瞬变体系不能用作基本结构。

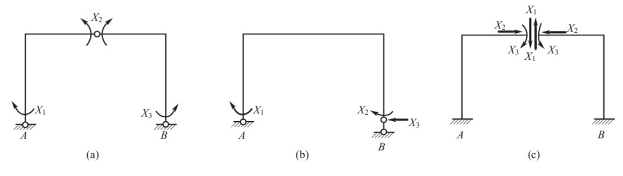


图 8.12

2. n 次超静定结构的力法方程

对于 n 次超静定结构的一般情形，力法的基本未知量是 n 个多余未知力 X_1、X_2、…、X_n。力法的基本体系是从原结构中去掉 n 个多余约束，而代之以相应的 n 个多余未知力后所得到的静定结构，力法的基本方程是在 n 个多余约束处的 n 个变形条件，即基本体系中沿多余未知力方向的位移应与原结构中相应的位移相等。在线性变形体中，根据叠加原理，n 个变形条件可写为：

$$\begin{cases}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\cdots+\delta_{1i}X_i+\cdots+\delta_{1n}X_n+\Delta_{1P}=0\\ \cdots\cdots\\ \delta_{i1}X_1+\delta_{i2}X_2+\cdots+\delta_{ii}X_i+\cdots+\delta_{in}X_n+\Delta_{iP}=0\\ \cdots\cdots\\ \delta_{n1}X_1+\delta_{n2}X_2+\cdots+\delta_{ni}X_i+\cdots+\delta_{nn}X_n+\Delta_{nP}=0\end{cases} \tag{8-4}$$

式(8-4)为 n 次超静定结构在荷载作用下力法方程的一般形式，因为不论超静定结构是什么形式，超静定结构的基本结构和基本未知量怎么选取，其力法基本方程均为此形式，故常称之为力法典型方程。它的物理意义为基本结构在荷载和全部多余未知力作用下，在去掉各多余约束处沿多余未知力方向的位移，应与原结构相应的位移相等。

在式(8-4)方程中，主斜线上的系数 δ_{ii} 称为主系数或主位移，它是单位多余未知力 $X_i=1$ 单独作用时所引起的沿 X_i 方向上的位移，其值恒为正，且不会等于零。在主斜线两侧的系数 δ_{ij} 称为副系数或副位移，它是单位多余未知力 $X_j=1$ 单独作用时所引起的沿 X_i 方向的位移。式中最后一项 Δ_{iP} 称为自由项，它是荷载单独作用时所引起的沿 X_i 方向的位移。副系数和自由项的值可能为正、负或零。

根据位移互等定理，系数 δ_{ij} 与 δ_{ji} 是相等的，即

$$\delta_{ij}=\delta_{ji}$$

典型方程中的各系数和自由项，都是静定结构在已知力作用下的位移，均可采用单位荷载法计算。对于平面结构，这些位移的计算可写为：

$$\begin{aligned}\delta_{ii}&=\sum\int\frac{\overline{M}_i^2}{EI}\mathrm{d}x+\sum\int\frac{\overline{N}_i^2}{EA}\mathrm{d}x+\sum\int\frac{k\,\overline{V}_i^2}{GA}\mathrm{d}x\\ \delta_{ij}&=\sum\int\frac{\overline{M}_i\,\overline{M}_j}{EI}\mathrm{d}x+\sum\int\frac{\overline{N}_i\,\overline{N}_j}{EA}\mathrm{d}x+\sum\int\frac{k\,\overline{V}_i\,\overline{V}_j}{GA}\mathrm{d}x\\ \Delta_{iP}&=\sum\int\frac{\overline{M}_iM_P}{EI}\mathrm{d}x+\sum\int\frac{\overline{N}_iN_P}{EA}\mathrm{d}x+\sum\int\frac{k\,\overline{V}_iV_P}{GA}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{8-5}$$

显然，对于各种具体结构，通常只需计算其中的一项或两项。系数和自由项求得后，解力法方程组，即可求得多余未知力 X_1、X_2、…、X_n，然后根据静力平衡条件或叠加原理，计算各截面内力，绘制内力图。按叠加原理计算内力的公式为：

$$\begin{aligned}M&=\overline{M}_1X_1+\overline{M}_2X_2+\cdots+\overline{M}_nX_n+M_P\\ V&=\overline{V}_1X_1+\overline{V}_2X_2+\cdots+\overline{V}_nX_n+V_P\\ N&=\overline{N}_1X_1+\overline{N}_2X_2+\cdots+\overline{N}_nX_n+N_P\end{aligned} \tag{8-6}$$

式中，$\overline{M}_i$、$\overline{V}_i$、$\overline{N}_i$是基本结构由 $X_i=1$ 单独作用时所产生的任一截面的内力($i=1$，2，…，n)；M_P、V_P、N_P是基本结构由荷载单独作用时所产生的任一截面的内力。

典型方程若采用矩阵形式，则可表示为：

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta_{1P} \\ \Delta_{2P} \\ \vdots \\ \Delta_{nP} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{8-7}$$

式中，由典型方程系数 δ_{ij} 组成的矩阵称为结构柔度矩阵，其中的元素 δ_{ij} 称为结构的柔度系数。因此，力法方程也称为柔度方程，力法也称为柔度法。

8.4 力法计算示例

根据以上所述，用力法计算超静定结构的步骤可归纳如下。

(1) 确定原结构的超静定次数。

(2) 选择基本结构与基本体系。选择适当的约束作为多余约束并将其去掉，得到的静定结构为原结构的基本结构。在选择基本结构的形式时，以使计算尽可能简单为原则。在基本结构上加上外荷载以及因去掉多余约束而加上的多余未知力就得到了基本体系。

(3) 建立力法方程。根据基本结构在多余未知力和荷载共同作用下，多余约束处的位移应与原结构相应的位移相等的条件，建立力法方程。

(4) 计算系数和自由项。作出基本结构的单位内力图和荷载内力图(或内力表达式)，按照求位移的方法计算方程中的系数和自由项。

(5) 解力法方程，求多余未知力。将计算所得的系数和自由项代入力法方程，求解多余未知力。

(6) 作内力图。求出多余未知力后，按分析静定结构的方法，由平衡条件或叠加法求得最后内力，并绘制内力图。

下面分别举例说明用力法计算超静定梁、刚架、桁架、铰接排架、组合结构和拱的具体方法。

1. 超静定梁和超静定刚架

用力法计算超静定梁和刚架时，由于剪力和轴力引起的位移较小，通常可忽略剪力和轴力对位移的影响，只考虑弯矩的影响。因此，力法方程中系数和自由项的表达式为：

$$\left.\begin{aligned} \delta_{ii} &= \sum\int \frac{\overline{M}_i^2}{EI}\mathrm{d}x \\ \delta_{ij} &= \sum\int \frac{\overline{M}_i\overline{M}_j}{EI}\mathrm{d}x \\ \Delta_{iP} &= \sum\int \frac{\overline{M}_iM_P}{EI}\mathrm{d}x \end{aligned}\right\} \tag{8-8}$$

1) 超静定梁

【例 8-1】 图 8.13(a)所示为一两端固定的超静定梁，满跨受均布荷载 q 的作用，作梁的内力图。

解：(1) 确定超静定次数 $n=3$。

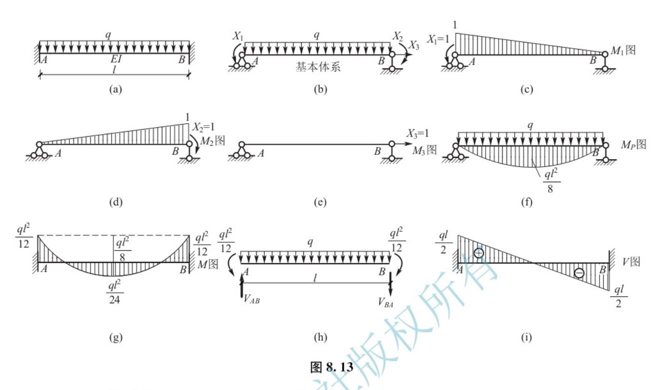


图 8.13

（2）选择基本体系。

去掉 A、B 端转动约束及 B 端水平约束，得到一简支梁为基本结构。在基本结构上加上外荷载以及因去掉多余约束而代之的多余未知力 X_1、X_2、X_3，就得到了基本体系，如图 8.13(b)所示。

（3）建立力法方程。

由梁的 A 端、B 端的转角和 B 端的水平位移分别等于零的变形条件，建立力法方程。

$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{13}X_3+\Delta_{1P}=0$$
$$\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{23}X_3+\Delta_{2P}=0$$
$$\delta_{31}X_1+\delta_{32}X_2+\delta_{33}X_3+\Delta_{3P}=0$$

（4）计算系数与自由项。

画基本结构在单位力 $X_1=1$、$X_2=1$ 和 $X_3=1$ 作用下的弯矩图，即$\overline{M}_1$图、$\overline{M}_2$图、$\overline{M}_3$图［图 8.13(c)、(d)、(e)］，以及在荷载作用下的弯矩图，即 M_P图［图 8.13(f)］。

由于弯矩$\overline{M}_3=0$，$\overline{V}_3=0$ 以及$\overline{N}_1=\overline{N}_2=\overline{N}_P=0$，故由图乘法可知 $\delta_{13}=\delta_{31}=0$，$\delta_{23}=\delta_{32}=0$，$\Delta_{3P}=0$。因此典型方程的第三式为：

$$\delta_{33}X_3=0$$

在计算 δ_{33}时，应同时考虑弯矩和轴力的影响，则有

$$\delta_{33}=\int\frac{\overline{M}_3^2}{EI}\mathrm{d}x+\int\frac{\overline{N}_3^2}{EA}\mathrm{d}x=0+\frac{l}{EA}=\frac{l}{EA}\neq 0$$

于是有

$$X_3=0$$

这表明两端固定梁在垂直于梁轴线的荷载作用下并不产生水平反力。因此，此题可简化为只求解两个多余未知力的问题，力法方程直接写为：

$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1P}=0$$
$$\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2P}=0$$

由图乘法可求得各系数和自由项为(只考虑弯矩影响)：

$$\delta_{11}=\int\frac{\overline{M}_1^2}{EI}\mathrm{d}x=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}l\times1\times\left(\frac{2}{3}\times1\right)\right]=\frac{l}{3EI}$$

$$\delta_{22}=\int\frac{\overline{M}_2^2}{EI}\mathrm{d}x=\frac{l}{3EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\int\frac{\overline{M}_1\overline{M}_2}{EI}\mathrm{d}x=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}l\times1\times\left(\frac{1}{3}\times1\right)\right]=\frac{l}{6EI}$$

$$\Delta_{1P}=\int\frac{\overline{M}_1M_P}{EI}\mathrm{d}x=\frac{1}{EI}\left[-\frac{2}{3}l\frac{ql^2}{8}\times\frac{1}{2}\times1\right]=-\frac{ql^3}{24EI}$$

$$\Delta_{2P}=\int\frac{\overline{M}_2M_P}{EI}\mathrm{d}x=-\frac{ql^3}{24EI}$$

(5) 解力法方程，求多余未知力。

将系数和自由项代入力法方程，消去 $l/(6EI)$得

$$\begin{cases}2X_1+X_2-\dfrac{ql^2}{4}=0\\X_1+2X_2-\dfrac{ql^2}{4}=0\end{cases}$$

解得

$$X_1=\frac{ql^2}{12},\ X_2=\frac{ql^2}{12}$$

(6) 作内力图。

由弯矩叠加公式 $M=\overline{M}_1X_1+\overline{M}_2X_2+\overline{M}_3X_3+M_P$计算弯矩值。最后弯矩图如图 8.13(g)所示。

取杆件 AB 为隔离体 [图 8.13(h)]，利用已知杆端弯矩，由静力平衡条件求出杆端剪力，作剪力图如图 8.13(i)所示。

由以上计算可知，两端固定的单跨超静定梁的弯矩图与同跨度、同荷载的简支梁相比较，因超静定梁两端受多余约束限制，不能产生转角位移而出现负弯矩(上侧受拉)，而梁中点的弯矩值较相应简支梁减少，降低了最大内力峰值，使整个梁上内力分布得以改善。

【例 8-2】 试用力法计算图 8.14(a)所示连续梁，作 M 图。

解： (1) 确定超静定次数 $n=2$。

(2) 选择基本体系。

去掉 A 端的转动约束和 C 端的竖向支杆，得到基本结构。在基本结构上加上外荷载以及因去掉多余约束而代之的多余未知力 X_1 和 X_2，就得到了基本体系，如图 8.14(b)所示。

(3) 建立力法方程。

根据基本体系应满足 A 端的转角和 C 端的竖向位移分别等于零的变形条件，建立力法方程：

$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1P}=0$$
$$\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2P}=0$$

(4) 计算系数与自由项。

作$\overline{M}_1$、$\overline{M}_2$和 M_P图，见图 8.14(c)、(d)、(e)。

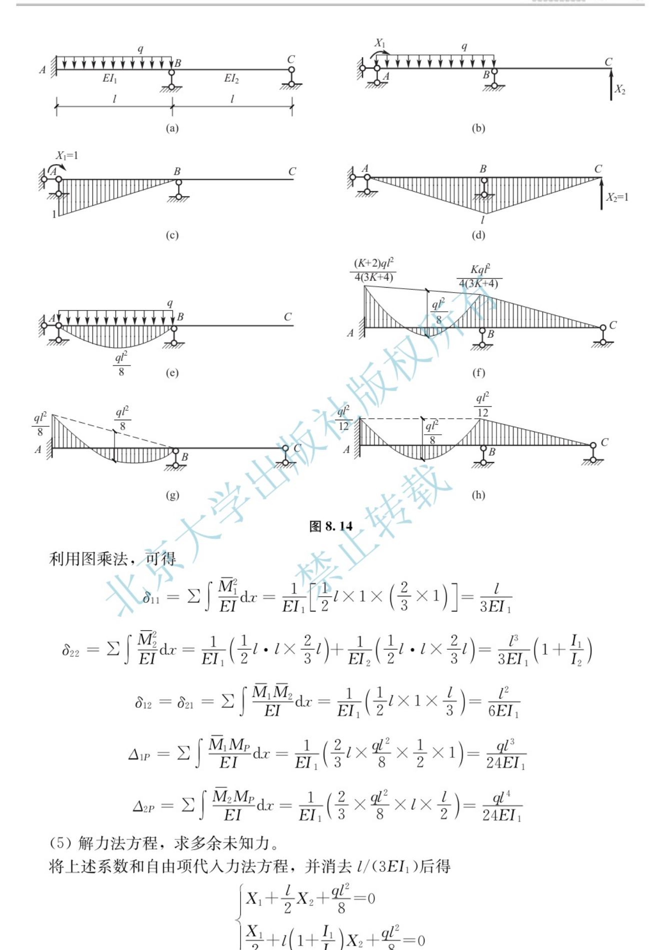


图 8.14

利用图乘法，可得

$$\delta_{11}=\sum\int\frac{\overline{M}_1^2}{EI}\mathrm{d}x=\frac{1}{EI_1}\left[\frac{1}{2}l\times1\times\left(\frac{2}{3}\times1\right)\right]=\frac{l}{3EI_1}$$

$$\delta_{22}=\sum\int\frac{\overline{M}_2^2}{EI}\mathrm{d}x=\frac{1}{EI_1}\left(\frac{1}{2}l\cdot l\times\frac{2}{3}l\right)+\frac{1}{EI_2}\left(\frac{1}{2}l\cdot l\times\frac{2}{3}l\right)=\frac{l^3}{3EI_1}\left(1+\frac{I_1}{I_2}\right)$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\sum\int\frac{\overline{M}_1\overline{M}_2}{EI}\mathrm{d}x=\frac{1}{EI_1}\left(\frac{1}{2}l\times1\times\frac{l}{3}\right)=\frac{l^2}{6EI_1}$$

$$\Delta_{1P}=\sum\int\frac{\overline{M}_1M_P}{EI}\mathrm{d}x=\frac{1}{EI_1}\left(\frac{2}{3}l\times\frac{ql^2}{8}\times\frac{1}{2}\times1\right)=\frac{ql^3}{24EI_1}$$

$$\Delta_{2P}=\sum\int\frac{\overline{M}_2M_P}{EI}\mathrm{d}x=\frac{1}{EI_1}\left(\frac{2}{3}\times\frac{ql^2}{8}\times l\times\frac{l}{2}\right)=\frac{ql^4}{24EI_1}$$

(5) 解力法方程，求多余未知力。

将上述系数和自由项代入力法方程，并消去 $l/(3EI_1)$后得

$$\begin{cases}X_1+\dfrac{l}{2}X_2+\dfrac{ql^2}{8}=0\\[2mm]\dfrac{X_1}{2}+l\left(1+\dfrac{I_1}{I_2}\right)X_2+\dfrac{ql^2}{8}=0\end{cases}$$

令 $I_2/I_1=K$，则得到

$$X_1=-\frac{ql^2}{4}\cdot\frac{K+2}{3K+4},\qquad X_2=-\frac{ql}{4}\cdot\frac{K}{3K+4}$$

负号表示多余未知力 X_1、X_2 的方向与所设方向相反。

（6）作 M 图。

由弯矩叠加公式 $M=\overline{M}_1X_1+\overline{M}_2X_2+M_P$ 计算弯矩值。最后弯矩图如图 8.14(f)所示。

由以上计算结果可知，多余未知力 X_1、X_2 和梁的弯矩值 M 的大小与梁的刚度比 $K=I_2/I_1$ 有关。当刚度比值 $K\to0$ 时，即 BC 跨的抗弯刚度 EI_2 远远小于 AB 跨的抗弯刚度 EI_1 时，$M_{AB}=-ql^2/8$，$M_{BA}=M_{BC}=0$，$M_{CB}=0$。对应的弯矩图如图 8.14(g)所示。AB 跨相当于一个 A 端固定、B 端简支的单跨梁承受着荷载，而 BC 跨因刚度过小，不能承受荷载，没有弯矩产生；当 $K\to\infty$时，即 BC 跨的抗弯刚度 EI_2 远远大于 AB 跨的抗弯刚度 EI_1 时，$M_{AB}=-ql^2/12$，$M_{BA}=M_{BC}=-ql^2/12$，$M_{CB}=0$。对应的弯矩图如图 8.14(h)所示，AB 跨的弯矩分布与两端固定的单跨梁相同，这是由于 BC 跨的刚度过大，完全约束了 B 点的转动。总之，在荷载作用下，超静定结构的内力分布与各杆的相对刚度值有关，相对刚度愈大，承受的内力也愈大。这是超静定结构受力的重要特征之一。

2）超静定刚架

【例 8－3】 用力法解图 8.15(a)所示刚架，作内力图。

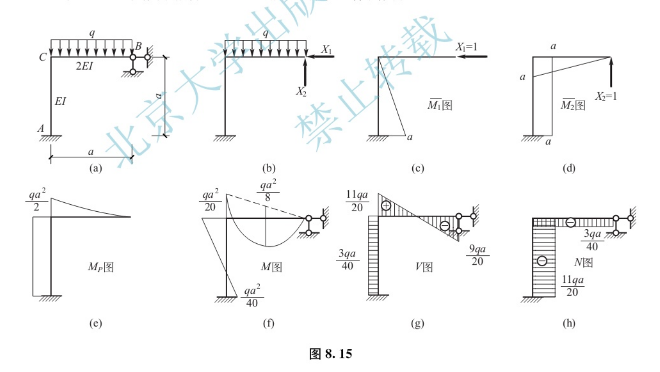


图 8.15

解：（1）确定超静定次数 $n=2$。

（2）选择基本体系。

去掉 B 点的水平支杆和竖向支杆，得到基本结构。在基本结构上加上外荷载 q 及因去掉多余约束而代之的多余未知力 X_1 和 X_2，就得到了基本体系，如图 8.15(b)所示。

（3）建立力法方程。

根据基本体系应满足 B 点的水平位移和竖向位移为零的变形条件，建立力法方程：

$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1P}=0$$
$$\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2P}=0$$

(4) 计算系数与自由项。

作$\overline{M}_1$、$\overline{M}_2$和M_P图，见图8.15(c)、(d)、(e)。

利用图乘法，可得

$$\delta_{11}=\sum\int\frac{\overline{M}_1^2}{EI}\mathrm{d}x=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\times a\times a\times\frac{2}{3}a\right)=\frac{a^3}{3EI}$$

$$\delta_{22}=\sum\int\frac{\overline{M}_2^2}{EI}\mathrm{d}x=\frac{1}{2EI}\left(\frac{1}{2}\times a\times a\times\frac{2}{3}a\right)+\frac{1}{EI}(a\times a\times a)=\frac{7a^3}{6EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\sum\int\frac{\overline{M}_1\overline{M}_2}{EI}\mathrm{d}x=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\times a\times a\times a\right)=\frac{a^3}{2EI}$$

$$\Delta_{1P}=\sum\int\frac{\overline{M}_1M_P}{EI}\mathrm{d}x=\frac{1}{EI}\left(-\frac{qa^2}{2}\times a\times\frac{a}{2}\right)=-\frac{qa^4}{4EI}$$

$$\Delta_{2P}=\sum\int\frac{\overline{M}_2M_P}{EI}\mathrm{d}x=\frac{1}{2EI}\left(-\frac{1}{3}\times\frac{qa^2}{2}\times a\times\frac{3}{4}a\right)+\frac{1}{EI}\left(-\frac{qa^2}{2}\times a\times a\right)=-\frac{9qa^4}{16EI}$$

(5) 解力法方程，求多余未知力。

将上述系数和自由项代入力法方程，并消去a^3/EI后得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{3}X_1+\dfrac{1}{2}X_2-\dfrac{qa}{4}=0\\[2ex]\dfrac{1}{2}X_1+\dfrac{7}{6}X_2-\dfrac{9qa}{16}=0\end{cases}$$

解得

$$X_1=\frac{3}{40}qa,\quad X_2=\frac{9}{20}qa$$

(6) 作内力图。

① 作M图。由弯矩叠加公式$M=\overline{M}_1X_1+\overline{M}_2X_2+M_P$计算弯矩值，最后弯矩图见图8.15(f)。

② 作V图。根据M图可直接求作剪力图，也可利用X_1和X_2作剪力图，剪力图见图8.15(g)。

③ 作N图。根据剪力图考虑结点平衡可作出轴力图，也可利用X_1和X_2作轴力图，轴力图见图8.15(h)。

由以上计算可以看出，由于典型方程中每个系数和自由项均含有EI，因而可以消去。由此可知，在荷载作用下，超静定结构的内力只与各杆的刚度相对值有关，而与其刚度绝对值无关。对于同一材料组成的结构，内力也与材料性质E无关。

工程中采用的刚架多数是超静定的。图8.16(a)所示为一个房屋的框架结构，图8.16(b)所示为其计算简图。图8.17(a)所示为一水闸的简图。其启闭台的纵梁是一个连续梁[图8.17(b)]，启闭台的横向承重结构是一个刚架[图8.17(c)、(d)]。图8.18(a)所示为

一弧形闸门，主梁(或主桁架)和腿架组成Ⅱ形刚架，计算简图见图 8.18(b)；腿架也可以做成斜的，如图 8.18(c)所示。

(a) (b)

图 8.16

(a) (b) (c) (d)

图 8.17

(a) (b) (c)

图 8.18

2. 超静定桁架

超静定桁架多在大跨度结构中使用。如图 8.19 所示为某大跨度厂房屋架，图 8.20 所示为武汉长江大桥主体桁架，图 8.21 所示为起重机架，图 8.22 所示为某屋盖的下弦水平支撑系统，它们是有交叉斜杆的超静定桁架。

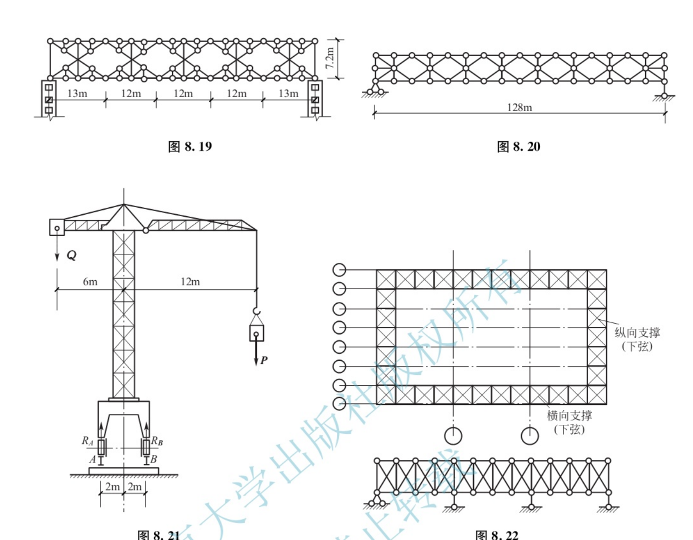


图 8.19

图 8.20

图 8.21

图 8.22

超静定桁架与静定桁架一样，在结点荷载作用下，桁架各杆只产生轴力。用力法计算时，力法方程中系数与自由项的计算公式为：

$$\left.\begin{aligned}\delta_{ii}&=\sum\frac{\overline{N}_i\overline{N}_i}{EA}l\\\delta_{ij}&=\sum\frac{\overline{N}_i\overline{N}_j}{EA}l\\\Delta_{iP}&=\sum\frac{\overline{N}_iN_P}{EA}l\end{aligned}\right\}\tag{8-9}$$

桁架各杆的最后轴力按下式计算：

$$N=\overline{N}_1X_1+\overline{N}_2X_2+\cdots+\overline{N}_nX_n+N_P\tag{8-10}$$

【例 8-4】 用力法计算图 8.23(a)所示超静定桁架的内力。设各杆 EA 相同。

解：（1）确定超静定次数 $n=1$。

（2）选择基本体系。

从几何组成观点分析，桁架中六根杆的任意一根都可作为多余约束，现认为 CD 杆为多余约束，将 CD 杆沿某一截面切断，去掉多余约束形成基本结构。去掉的多余约束用一

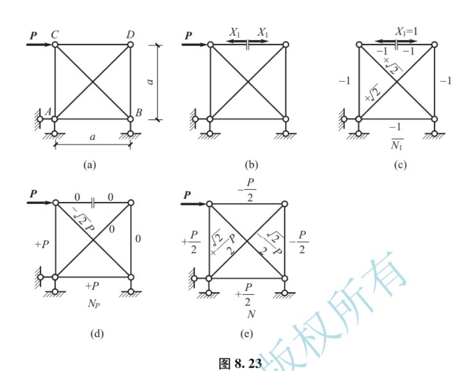


图 8.23

对多余未知力 X_1 代替，保留原有荷载，形成基本体系［图 8.23(b)］。

(3) 建立力法方程。

根据切口沿多余未知力 X_1 方向的相对位移为零的条件，建立力法方程：

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$

(4) 求系数和自由项。

分别求出基本结构在单位力 $X_1=1$ 和荷载单独作用下各杆的内力 $\overline{N}_1$ 和 N_P［图 8.23(c)、(d)］，即可按式(8-9)求得系数和自由项。

$$\delta_{11}=\sum\frac{\overline{N}_1^2}{EA}l=\frac{1}{EA}[4\times(-1)\times(-1)\times a+2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}a]=\frac{4a}{EA}(1+\sqrt{2})$$

$$\Delta_{1P}=\sum\frac{\overline{N}_1N_P}{EA}l=\frac{1}{EA}[2\times P\times(-1)\times a+(-\sqrt{2}P)\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}a]=-\frac{2Pa}{EA}(1+\sqrt{2})$$

(5) 解力法方程，求多余未知力。

将上述系数和自由项代入力法方程，求得

$$X_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=\frac{P}{2}$$

(6) 计算各杆的轴力。

桁架各杆的轴力可按下式计算：

$$N=\overline{N}_1X_1+N_P$$

最后结果见图 8.23(e)。

计算时注意：虽然杆 CD 被切断，但在多余力作用下其轴力并不为零，故在 δ_{11} 的算式中必须将与其相应的项 $\frac{(-1)^2a}{EA}$ 包括在内。

3. 铰接排架

图 8.24(a)所示为装配式单层厂房的横剖面结构示意图，主要承重结构是屋架(或屋面

大梁)、柱和基础。当不考虑纵向影响时，可按平面结构计算。其计算简图如图 8.24(b)所示。柱与基础的连接视为刚结，屋架与柱之间的连接如图 8.24(c)所示，可视为铰结点，这样组成的结构称为排架。排架承受着厂房横向计算单元上屋盖传来的荷载、吊车荷载、横向风荷载等。在屋面荷载作用下，屋架本身可单独按桁架计算。当柱上作用荷载时，屋架只起联系两柱顶的作用，相当于一个链杆。由于柱上常放置吊车梁及柱上荷载较小，因此排架柱多制成阶梯形变截面的形状。

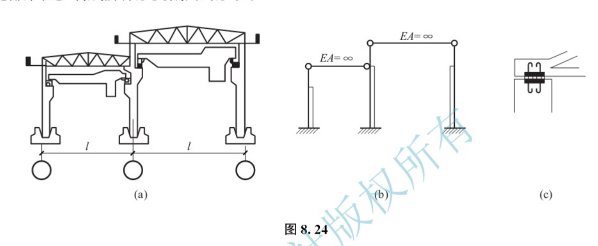


图 8.24

计算排架时，我们假定排架的横梁刚度很大，受力后轴向变形很小，可以忽略不计，即认为排架受力作用后横梁两端的两个柱子的柱顶水平位移相等。这对于一般钢屋架、钢筋混凝土或预应力混凝土屋架是适用的，但对于刚度较小的屋架，则必须考虑横梁的轴向变形。

【例 8－5】 试用力法计算图 8.25(a)所示风荷载作用下的不等高排架，作弯矩图。各柱相对刚度如图所示。

解：(1) 确定超静定次数 $n=2$。

(2) 选择基本体系。

将 DG、FH 两根链杆视为多余约束，将其切断得到基本结构。在基本结构上加上与之多余约束对应的多余未知力 X_1、X_2，保留原有荷载，形成基本体系［图 8.25(b)］。

(3) 建立力法方程。

根据基本结构在荷载和多余未知力共同作用下，应满足切口处两侧截面沿轴向的相对位移为零的变形条件，建立力法方程：

$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1P}=0$$

$$\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2P}=0$$

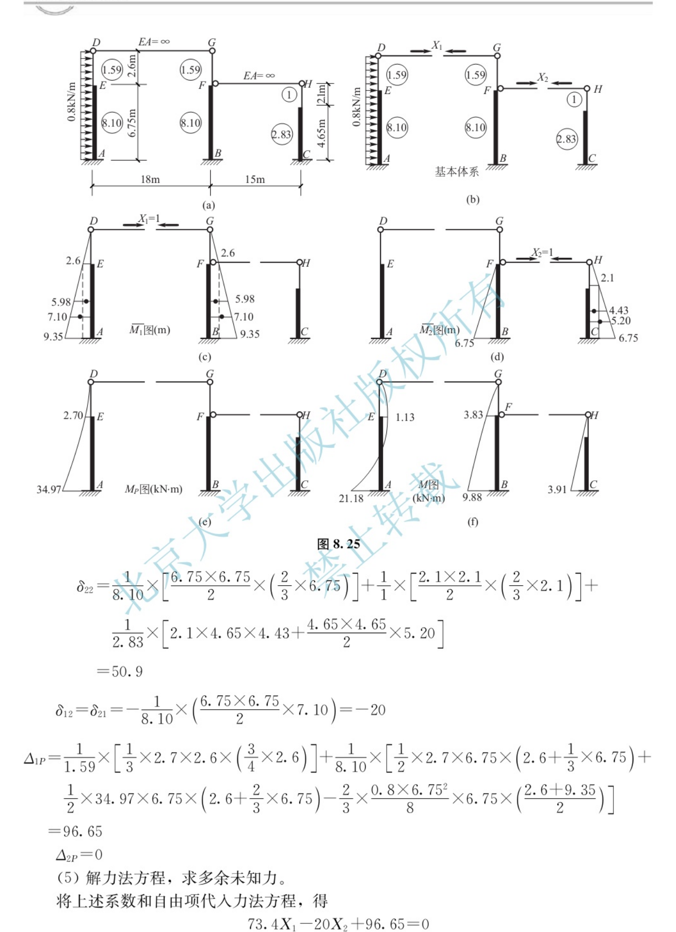
(4) 求系数和自由项。

作$\overline{M}_1$、$\overline{M}_2$和 M_P图，见图 8.25(c)、(d)、(e)。

利用图乘法，可得

$$\delta_{11}=\frac{1}{1.59}\times\left[\frac{2.6\times2.6}{2}\times\left(\frac{2}{3}\times2.6\right)\right]\times2+\frac{1}{8.10}\times\left[2.6\times6.75\times5.98+\frac{6.75\times6.75}{2}\times7.10\right]\times2$$

$$=73.4$$



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

图 8.25

$$\delta_{22}=\frac{1}{8.10}\times\left[\frac{6.75\times6.75}{2}\times\left(\frac{2}{3}\times6.75\right)\right]+\frac{1}{1}\times\left[\frac{2.1\times2.1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\times2.1\right)\right]+$$
$$\frac{1}{2.83}\times\left[2.1\times4.65\times4.43+\frac{4.65\times4.65}{2}\times5.20\right]$$
$$=50.9$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=-\frac{1}{8.10}\times\left(\frac{6.75\times6.75}{2}\times7.10\right)=-20$$

$$\Delta_{1P}=\frac{1}{1.59}\times\left[\frac{1}{3}\times2.7\times2.6\times\left(\frac{3}{4}\times2.6\right)\right]+\frac{1}{8.10}\times\left[\frac{1}{2}\times2.7\times6.75\times\left(2.6+\frac{1}{3}\times6.75\right)+\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}\times34.97\times6.75\times\left(2.6+\frac{2}{3}\times6.75\right)-\frac{2}{3}\times\frac{0.8\times6.75^2}{8}\times6.75\times\left(\frac{2.6+9.35}{2}\right)\right]$$
$$=96.65$$

$$\Delta_{2P}=0$$

(5) 解力法方程，求多余未知力。

将上述系数和自由项代入力法方程，得

$$73.4X_1-20X_2+96.65=0$$
$$-20X_1+50.9X_2+0=0$$

解得

$$X_1 = -1.475\text{kN}$$
$$X_2 = -0.579\text{kN}$$

负号表示实际力为压力。

(6) 作内力图。

利用弯矩叠加公式 $M=\overline{M}_1X_1+\overline{M}_2X_2+M_P$ 得弯矩图，如图 8.25(f)所示。

4. 超静定组合结构

在实际工程中，为了节约材料和制造方便，有时采用超静定组合结构。这类结构的一部分杆件作用与梁相同，主要承受弯矩，而另一部分杆件则与桁架链杆作用相同，只承受轴力。因此在用力法分析时，力法方程中的系数和自由项可由下式计算：

$$\delta_{ii} = \sum\int\frac{\overline{M}_i^2}{EI}\mathrm{d}x + \sum\frac{\overline{N}_i^2}{EA}l$$
$$\delta_{ij} = \sum\int\frac{\overline{M}_i\overline{M}_j}{EI}\mathrm{d}x + \sum\frac{\overline{N}_i\overline{N}_j}{EA}l \qquad (8-11)$$
$$\Delta_{iP} = \sum\int\frac{\overline{M}_iM_P}{EI}\mathrm{d}x + \sum\frac{\overline{N}_iN_P}{EA}l$$

图 8.26(a)所示为一吊车梁，顶部横梁为钢筋混凝土梁，下面各杆由角钢组成。吊车梁两端由柱子上的牛腿支承，其计算简图如图 8.26(b)所示。AB 为梁式杆，AD、CD 及 BD 为链杆，它是一个超静定的组合结构。图 8.27 所示为北京某游泳馆悬吊梁，也属于超静定组合结构。

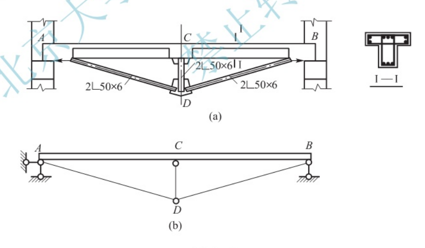


图 8.26

【例 8-6】 图 8.28(a)所示为一加劲梁，横梁 $I=1\times10^{-4}\text{m}^4$。链杆 $A=1\times10^{-3}\ \text{m}^2$，$E=$常数。试绘制梁的弯矩图，并计算各杆轴力。

解：(1) 确定超静定次数 $n=1$。

(2) 选择基本体系。

将竖向链杆视为多余约束，将其切断得到基本结构。在基本结构上加上与之多余约束对应的

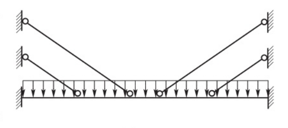


图 8.27

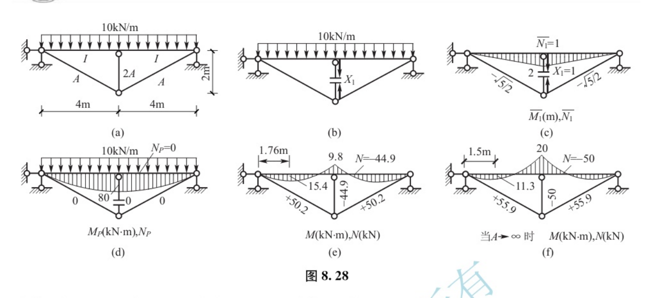


图 8.28

多余未知力 X_1，保留原有荷载，形成基本体系［图 8.28(b)］。

(3) 建立力法方程。

根据基本结构在荷载和多余未知力共同作用下，应满足切口处两侧截面沿轴向的相对位移为零的变形条件，建立力法方程：

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$

(4) 求系数和自由项。

分别绘出基本结构中梁的$\overline{M}_1$和M_P图并求出各杆的轴力$\overline{N}_1$和N_P［图 8.28(c)、(d)］，即可按式(8-10)求得系数和自由项。

$$\begin{aligned}\delta_{11}&=\sum\int\frac{\overline{M}_1^2}{EI}\mathrm{d}x+\sum\frac{\overline{N}_1^2}{EA}l\\&=\frac{1}{E\times1\times10^{-4}}\left(2\times\frac{4\times2}{2}\times\frac{2\times2}{3}\right)+\frac{1}{E\times1\times10^{-3}}\left[\frac{1^2\times2}{2}+2\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\times2\sqrt{5}\right]\\&=\frac{1}{E}(1.067\times10^5+0.122\times10^5)\\&=\frac{1}{E}(1.189\times10^5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{1P}&=\sum\int\frac{\overline{M}_1M_P}{EI}\mathrm{d}x+\sum\frac{\overline{N}_1N_P}{EA}l\\&=\frac{1}{E\times1\times10^{-4}}\left(2\times\frac{2\times4\times80}{3}\times\frac{5\times2}{8}\right)+0\\&=\frac{1}{E}(5.333\times10^6)\end{aligned}$$

(5) 解力法方程，求多余未知力。

将上述系数和自由项代入力法方程，得

$$X_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=\frac{5.333\times10^6}{1.189\times10^5}=-44.9\text{kN}$$

(6) 计算内力。

内力叠加公式为：

$$N=\overline{N}_1X_1+N_P$$

$$M=\overline{M}_1X_1+M_P$$

据此可绘出梁的弯矩图并求出各杆轴力，如图 8.28(e)所示。

(7) 讨论。

由图 8.28(e)所示 M 图可以看出，由于下部链杆的支承作用，梁的最大弯矩值比没有这些链杆时减少 80.75%。

如果改变链杆截面 A 的大小，结构内力分布将随之改变。当 A 减小时，梁的正弯矩值将增大而负弯矩值将减小。当 $A\to 0$ 时，梁的弯矩图将为简支梁的弯矩图［图 8.28(d)］。反之，当 A 增大时，梁的正弯矩值将减小而负弯矩值将增大。当 $A\to\infty$时，梁的中点相当于有一刚性支座，其弯矩图将与两跨连续梁的弯矩图相同［图 8.28(f)］。

5. 超静定拱

拱结构是工程中采用较多的一种结构形式。它可分为图 8.29(a)所示的两铰拱和图 8.29(b)所示的无铰拱。这类结构与第 5 章所述的三铰拱基本一样，其优点在于主要承受轴向压力，利用抗压性能强而抗拉性能弱的砖、石、混凝土等材料来建造。这些材料不仅价格较低而且便于就地取材，这就使得拱结构在工程上得到广泛的应用。

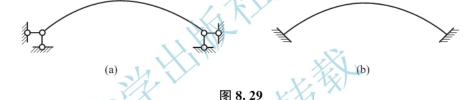


图 8.29

图 8.30(a)所示为历史上著名的赵州石拱桥。图 8.30(b)所示为带拉杆的拱式屋架，其计算简图如图 8.30(c)所示，屋架中的曲杆为钢筋混凝土构件，拉杆为角钢，吊杆是为了防止拉杆下垂而设的构件。水利工程和地下隧洞衬砌也是一种拱式结构，见图 8.30(d)、(e)。

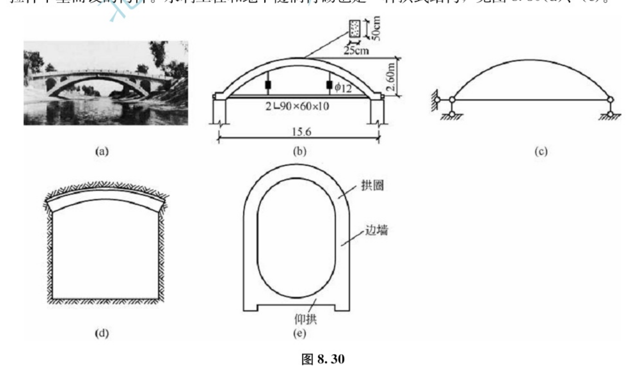


图 8.30

如图 8.31 所示的两铰拱为是一次超静定结构，计算时通常取水平推力为多余未知力建立力法方程。计算系数和自由项时，由于基本结构是一个简支曲梁，则位移 δ_{11} 和 Δ_{1P} 不能用图乘法计算，而应按积分计算。在计算 Δ_{1P} 时一般只考虑弯矩影响，在计算 δ_{11} 时，对于扁平拱 $\left(f<\frac{l}{3}\right)$ 则需考虑弯矩与轴力两项影响，通常剪力对位移的影响可忽略不计。因此有

$$\left.\begin{aligned}\delta_{11}&=\int\frac{\overline{M}_1^2}{EI}\mathrm{d}s+\int\frac{\overline{N}_1^2}{EA}\mathrm{d}s\\ \Delta_{1P}&=\int\frac{\overline{M}_1M_P}{EI}\mathrm{d}s\end{aligned}\right\}\tag{8-12}$$

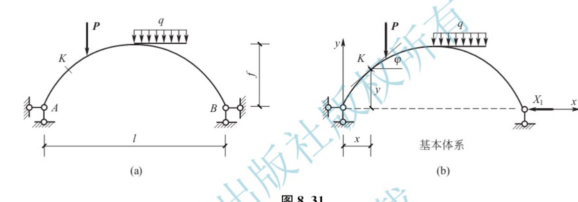


图 8.31

求出多余未知力后，竖向荷载作用下两铰拱的内力计算式与三铰拱是相似的，即为

$$\begin{aligned}M&=M^0-X_1y\\ V&=V^0\cos\varphi-X_1\sin\varphi\\ N&=V^0\sin\varphi+X_1\cos\varphi\end{aligned}\tag{8-13}$$

式中　y 为任意截面的纵坐标，向上为正；φ 为任意截面处拱轴切线与 x 轴所成的锐角，在左半拱的 φ 正值，右半拱的 φ 为负值；M^0 为相应简支梁的弯矩；V^0 为相应简支梁的剪力。

【例 8-7】 计算图 8.32(a)所示等截面两铰拱。已知拱轴方程为 $y=\frac{4f}{l^2}x(l-x)$，拱截面面积 $A=384\times10^{-3}\text{m}^2$，惯性矩 $I=1843\times10^{-6}\text{m}^4$，$E=192\text{GPa}$。

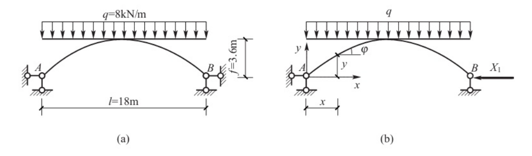


图 8.32

解：（1）选择基本体系。

将支座 B 的水平链杆视为多余约束，将其去掉得到的简支曲梁作为基本结构。在基本结构上加上与之多余约束对应的多余未知力 X_1，保留原有荷载，形成基本体系［图 8.32(b)］。

（2）建立力法方程。

根据基本结构在荷载和多余未知力共同作用下，在支座 B 处沿 X_1 方向的水平位移为零的变形条件，建立力法方程：

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$

（3）求系数和自由项。

因拱的高跨比 $\frac{f}{l}=\frac{3.6}{18}=\frac{1}{5}<\frac{1}{3}$，故需考虑轴力的影响。又当 $\frac{f}{l}<\frac{1}{4}$ 时，可近似地取 $ds\approx dx$，$\cos\varphi\approx 1$。则基本结构在单位多余未知力 $X_1=1$ 和荷载分别作用下引起的弯矩和轴力可表示为：

$$\overline{M}_1=-y \quad \overline{N}_1=\cos\varphi=1$$

$$M_P=M^0=\frac{q}{2}x(l-x)$$

弯矩以使拱的内侧受拉为正；轴力以使拱轴压缩为正。

$$\begin{aligned}\delta_{11}&=\int\frac{\overline{M}_1^2}{EI}dx+\int\frac{\overline{N}_1^2}{EA}dx=\frac{1}{EI}\int_0^l(-y)^2dx+\frac{1}{EA}\int_0^l dx\\&=\frac{1}{EI}\int_0^l\left[\frac{4f}{l^2}x(l-x)\right]^2dx+\frac{1}{EA}\int_0^l dx=\frac{16f^2l}{30EI}+\frac{l}{EA}\\&=\frac{16\times3.6^2\times18}{30\times192\times10^9\times1843\times10^{-6}}+\frac{18}{192\times10^9\times384\times10^{-3}}\\&=3518.45\times10^{-10}\text{m/N}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{1P}&=\int\frac{\overline{M}_1M_P}{EI}dx=\frac{1}{EI}\int_0^l\left[-\frac{4f}{l^2}x(l-x)\right]\cdot\left[\frac{q}{2}x(l-x)\right]dx=\frac{-qfl^3}{15EI}\\&=\frac{-8\times10^3\times3.6\times18^3}{15\times192\times10^9\times1843\times10^{-6}}\\&=-316.44\times10^{-4}\text{m}\end{aligned}$$

（4）解力法方程，求多余未知力。

将上述系数和自由项代入力法方程，得

$$X_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=89.94\text{kN}$$

（5）计算内力。

多余未知力 X_1 求得后，按式(8-11)计算拱中各截面的内力，并作出内力图，此处从略。

有时为了不使两铰拱的水平推力传给下部支承结构，可采用具有拉杆(其抗拉刚度为 E_1A_1)的两铰拱。对于这种结构，应以拉杆内力作为多余未知力，它的计算方法和步骤同上，但在计算系数 δ_{11} 时，除应考虑拱的变形外，还需考虑拉杆轴向变形 $\frac{l}{E_1A_1}$ 的影响。

8.5 对称性的利用

用力法计算超静定结构的主要工作量在于建立和求解力法方程。超静定次数愈高，计算方程中系数、自由项和求解方程的工作量愈大，因此在计算中力求简化。如使尽可能多的副系数及自由项等于零或减少计算的未知量数目，则计算工作量可大为简化。能达到简化的方法很多，本节只讨论对称性的利用。

在实际工程中，有很多结构是对称的，利用其对称性可简化计算。

1. 结构和荷载的对称性

1）结构的对称性

结构的对称，是指对结构中某一轴的对称。所以，对称结构必须有对称轴。结构的对称性，包含以下两个方面：

（1）结构的几何形状和支承情况对某一轴线对称；

（2）杆件截面尺寸和材料的弹性模量（即各杆的刚度 EI、EA、GA）也对称于此轴。因此，对称结构绕对称轴对折后，对称轴两边的结构图形完全重合及材料性质完全相同。

例如图 8.33(a)所示刚架是一个对称刚架；图 8.33(b)所示矩形涵管是一个对称结构，并且有两根对称轴；图 8.33(c)所示刚架也是一个对称结构，其对称轴为一根斜向轴。

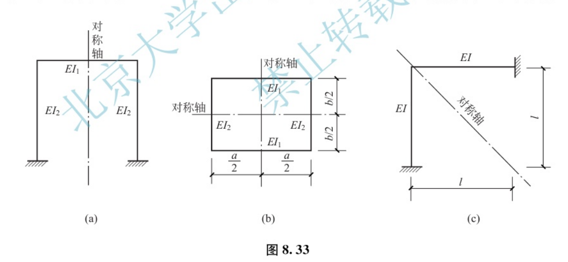


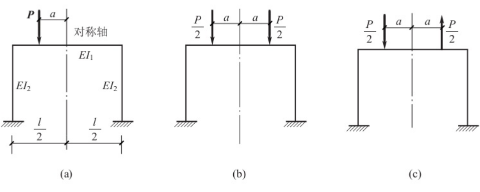
图 8.33

2）荷载的对称性

作用在对称结构上的任何荷载［图 8.34(a)］都可分解为两组：一组是对称荷载［图 8.34(b)］，另一组是反对称荷载［图 8.34(c)］。对称荷载绕对称轴对折后，对称轴两边的荷载彼此重合（作用点相对应、数值相等、方向相同）；反对称荷载绕对称轴对折后，对称轴两边的荷载正好相反（作用点相对应、数值相等、方向相反）。

2. 取对称的基本结构

计算超静定结构对称结构时，应考虑选择对称的基本结构进行计算，在图 8.34(a)所示的三次超静定刚架中，可沿对称轴上梁的中间截面切开，则得到一个对称的基本结构



(a)　　(b)　　(c)

图 8.34

[图 8.35(a)]。梁的截面切口两侧有三对相互作用的多余未知力：一对弯矩 X_1、一对轴力 X_2 和一对剪力 X_3，其中 X_1 和 X_2 是对称力，X_3 是反称对力。根据基本结构在荷载及多余未知力 X_1、X_2 和 X_3 共同作用下在切口两侧截面的相对转角、相对水平线位移和相对竖向线位移分别等于零，建立力法方程：

$$\left.\begin{aligned}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{13}X_3+\Delta_{1P}=0\\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{23}X_3+\Delta_{2P}=0\\ \delta_{31}X_1+\delta_{32}X_2+\delta_{33}X_3+\Delta_{3P}=0\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

(a)　　(b)　　(c)　　(d)

图 8.35

绘出基本结构在单位多余未知力下的单位弯矩图和变形图，可以看出，对称的多余未知力 X_1、X_2 所产生的弯矩图$\overline{M}_1$图［图 8.35(b)］、$\overline{M}_2$图［图 8.35(c)］及变形图是对称的；反对称的多余未知力 X_3 所产生的弯矩图$\overline{M}_3$图［图 8.35(d)］和变形图是反对称的。由于正、反对称的两图相乘时恰好正负抵消，使结果为零，因而可知副系数

$$\delta_{13}=\delta_{31}=0\ ,\ \delta_{23}=\delta_{32}=0$$

于是，力法方程简化为：

$$\left.\begin{aligned}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1P}=0\\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2P}=0\\ \delta_{33}X_3+\Delta_{3P}=0\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

由式(b)可以看出，方程已分为两组。一组只包含对称的多余未知力；另一组只包含反对称的多余未知力。这就使原来的方程组分解为两个独立的低阶方程组，虽然未知力个数并未减少，但解两个低阶方程组比解原方程组要简单得多。

3. 荷载分组

任何荷载都可分解为对称荷载和反对称荷载两部分。如果将作用在结构上的荷载[图 8.34(a)]也分解成对称和反对称两种情况[图 8.34(b)、(c)]，则计算还可以进一步得到简化。

在对称荷载作用下，基本结构的荷载弯矩图 M_P 图是对称的[图 8.36(a)]。由于 $\overline{M}_3$ 图是反对称的[图 8.35(d)]，于是 $\Delta_{3P}=0$，将其代入力法方程式(b)的第三式，可得反对称多余未知力 $X_3=0$，因此只有对称的多余未知力 X_1 和 X_2 [图 8.36(b)]。

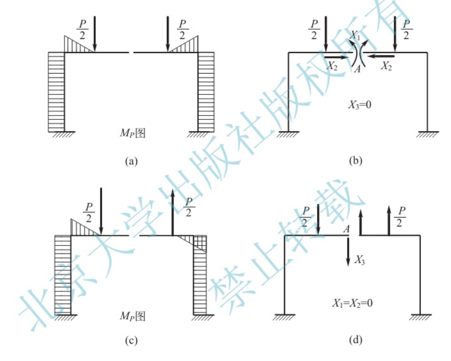


图 8.36

在反对称荷载作用下，基本结构的荷载弯矩图 M_P 图是反对称的[图 8.36(c)]。由于 $\overline{M}_1$ 图和 $\overline{M}_2$ 图是对称的[图 8.35(b)、(c)]，于是 $\Delta_{1P}=0$，$\Delta_{2P}=0$，将其代入力法方程式(b)的前两式，可得对称多余未知力 $X_1=0$、$X_2=0$，因此只有反对称的多余未知力 X_3 [图 8.36(d)]。

综上所述得出如下结论：对称结构在对称荷载作用下，只有对称的多余未知力存在，反对称的多余未知力必为零，结构的内力(以及变形)是对称的。对称结构在反对称荷载作用下，只有反对称的多余未知力存在，对称的多余未知力必为零，结构的内力(以及变形)是反对称的。利用这一特性可以简化力法计算，也可以用来检验计算结果的正确性。

4. 取半边结构计算

根据对称结构在对称荷载和反对称荷载作用下的内力和变形特点，可取半边结构计算

对称结构，例如，在分析对称刚架时，可取半个刚架来进行计算，称为半刚架法。下面就奇数跨和偶数跨两种对称刚架加以说明。

1）奇数跨对称刚架

（1）在对称荷载作用下的半刚架。图 8.37(a)所示刚架，在对称荷载作用下，由于只产生正对称的内力和变形，故位于对称轴上的截面 C 处不可能产生转角和水平线位移，但可能产生竖向线位移。同时，该截面上只有对称的多余未知力(弯矩和轴力)，而反对称的多余未知力(剪力)应为零。因此，当截取半边刚架计算时，在截面 C 处可用一定向支座来代替原有的约束，从而得到如图 8.37(b)所示的计算简图。

（2）在反对称荷载作用下的半刚架。图 8.37(c)所示刚架，在反对称荷载作用下，由于只产生反对称的内力和变形，故位于对称轴上的截面 C 处不可能产生竖向线位移，但可有水平线位移和转角。同时，该截面上只有反对称的多余未知力(剪力)，而对称多余未知力(弯矩和轴力)应为零。因此，当截取半边刚架计算时，在截面 C 处可用竖向的可动铰支座来代替原有的约束，从而得到如图 8.37(d)所示的计算简图。

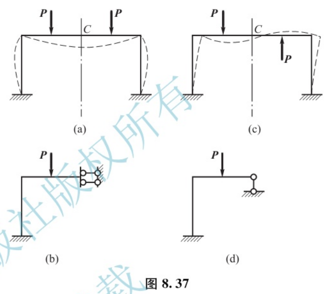


图 8.37

2）偶数跨对称刚架

（1）在对称荷载作用下的半刚架。图 8.38(a)所示刚架，在对称荷载作用下，由于只产生正对称的内力和变形，故位于对称轴上的截面 C 处将不可能产生任何位移(因为忽略了柱的轴向变形)。同时，在该处的横梁杆端有弯矩、轴力和剪力存在。因此，当截取半边刚架计算时，该处可用固定支座来代替原有的约束，从而得到如图 8.38(b)所示的计算简图。

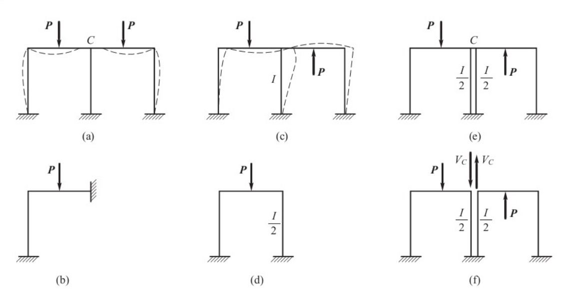


图 8.38

(2) 在反对称荷载作用下的半刚架。图 8.38(c)所示刚架，在反对称荷载作用下，可将其中间柱设想为由两根惯性矩各为 $I/2$ 的竖柱组成，它们分别在对称轴两侧与横梁刚结，如图 8.38(e)所示。若将此两柱中间的横梁切开，由于荷载是反对称的，故该截面上只有剪力存在［图 8.38(f)］。当不考虑轴向变形时，这一对剪力 V_C 对其他各杆均不产生内力，而只使对称轴两侧的两根竖柱产生大小相等性质相反的轴力。由于原有中间柱的内力是两根竖柱的内力之和，故剪力 V_C 对原结构的内力和变形都无影响，于是可将其略去而取半边刚架计算，计算简图如图 8.38(d)所示。

【例 8－8】 试利用对称性，作图 8.39(a)所示刚架的弯矩图，EI＝常数。

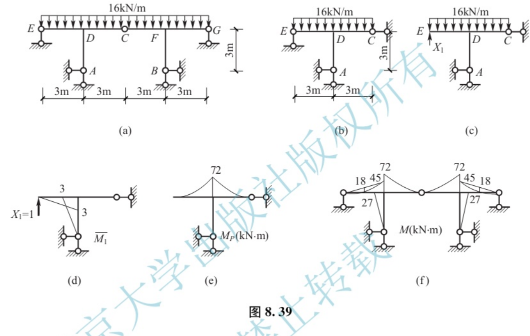


图 8.39

解：(1) 对称性分析。

这是一个有一个对称轴的二次超静定刚架，荷载也对称于该对称轴，利用对称性，可取半边结构计算，如图 8.39(b)所示。

(2) 选择基本体系。

将支座 E 的支杆视为多余约束，将其去掉得到的简支刚架作基本结构。在基本结构上加上与之多余约束对应的多余未知力 X_1，保留原有荷载，形成基本体系［图 8.4(c)］。

(3) 建立力法方程。

根据基本结构在荷载和多余未知力共同作用下，在支座 E 处沿 X_1 方向的竖向位移为零的变形条件，建立力法方程：

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$

(4) 求系数和自由项。

作$\overline{M}_1$和 M_P图，见图 8.39(d)、(e)。

利用图乘法，可得

$$\delta_{11}=\frac{2}{EI}\left(\frac{1}{2}\times3\times3\times\frac{2}{3}\times3\right)=\frac{18}{EI}$$

$$\Delta_{1P}=-\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}\times72\times3\times\frac{3}{4}\times3\right)=-\frac{162}{EI}$$

(5) 解力法方程，求多余未知力。

$$X_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=9\text{kN}$$

(6) 作 M 图。

先作半边结构的 M 图，再利用对称性作原结构的 M 图，见图 8.39(f)。

【例 8-9】 试利用对称性，计算图 8.40(a)所示刚架，EI=常数。

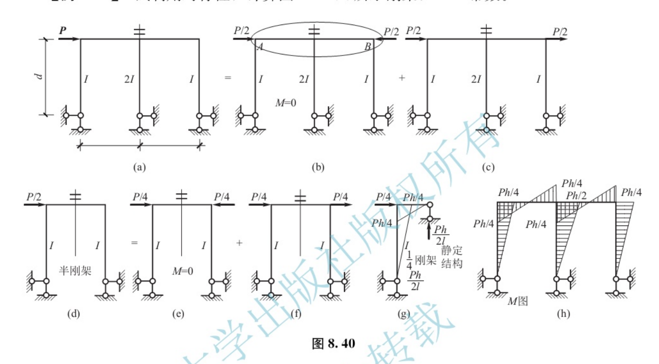


图 8.40

解： 这是一个三次超静定对称刚架，荷载 P 是非对称荷载，利用结构的对称性，把荷载分解为对称与反对称两组，分别如图 8.40(b)、(c)所示。

图 8.40(b)所示对称结构在对称荷载作用下，AB 杆自相平衡，若不考虑轴向变形，A、B 点不动，故结构上无弯矩，$M=0$。图 8.40(c)所示对称结构在反对称荷载作用下有弯矩 M 和弯曲变形，可取半边结构［图 8.40(d)］计算。

图 8.40(d)所示的半边结构仍具有对称性，再利用对称性将其分解为对称荷载与反对称荷载两组，分别如图 8.40(e)、(f)所示。同理，在对称荷载作用下半边结构无弯矩，$M=0$［图 8.40(e)］；在反对称荷载作用下，有弯矩 M 和弯曲变形，可取 1/4 结构［图 8.41(g)］计算。

1/4 结构是一静定结构，其弯矩图可由静力平衡方程求得。由此得出，原结构的弯矩图如图 8.40(h)所示。

8.6 温度变化和支座移动时超静定结构的计算

对于静定结构只有在荷载作用下才会产生内力，在非荷载因素作用时，结构不产生内力。而超静定结构则不然，只要存在使结构产生变形的因素如温度改变、支座移动、材料收缩、制造误差等，都会使超静定结构产生内力，这是超静定结构不同于静定结构的一个重要特性。用力法计算超静定结构在非荷载因素作用下的内力时，其原理和步骤与荷载作

用时的情况基本相同。下面将分别讨论温度改变和支座移动时超静定结构的计算。

1. 温度变化时超静定结构的计算

图 8.41(a)所示为一二次超静定刚架。设各杆件外侧温度升高 t_1^0，内侧温度升高 t_2^0。去掉 C 支座两个多余约束代之以多余未知力 X_1、X_2，得基本体系如图 8.41(b)所示。

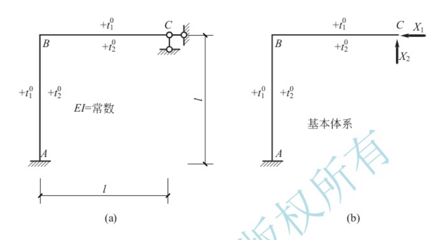


图 8.41

根据基本结构在多余未知力 X_1、X_2 以及温度变化的共同作用下，C 点位移应与原结构相同的变形条件，建立力法方程：

$$\left.\begin{aligned}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1t}=0\\\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2t}=0\end{aligned}\right\}\tag{8-14}$$

式(8-10)中系数的物理意义和计算方法均与荷载作用下的力法典型方程中的系数相同。自由项 Δ_{1t} 和 Δ_{2t} 分别代表基本结构上的 C 点在 X_1 和 X_2 方向上由于温度变化所引起的位移，它们需根据温度变化引起的位移计算公式(7-13)计算，即

$$\Delta_{Kt}=\sum(\pm)\alpha t_0 A_{\overline{N}}+\sum(\pm)\alpha\frac{\Delta t}{h}A_{\overline{M}}$$

因为基本结构是静定的，温度变化并不产生内力，故最后弯矩图只由多余未知力所引起，即

$$M=\overline{M}_1X_1+\overline{M}_2X_2$$

【例 8-10】 图 8.42(a)所示刚架各杆外侧温度 $t_1=-30℃$，内侧温度 $t_2=18℃$，试绘制其弯矩图。设各杆 $EI=$常数，截面对称于形心轴，截面高度为 $h=l/10$，温度线膨胀系数为 α。

解：(1) 选取基本体系。

由于结构具有对称性，且温度变化的分布也是对称的，故选对称的基本体系如图 8.42(b)所示。

(2) 建立力法方程。

根据基本结构在温度变化和多余未知力 X_1、X_2 共同作用下截面处相对位移为零的变形条件，建立力法方程：

$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1t}=0$$
$$\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2t}=0$$

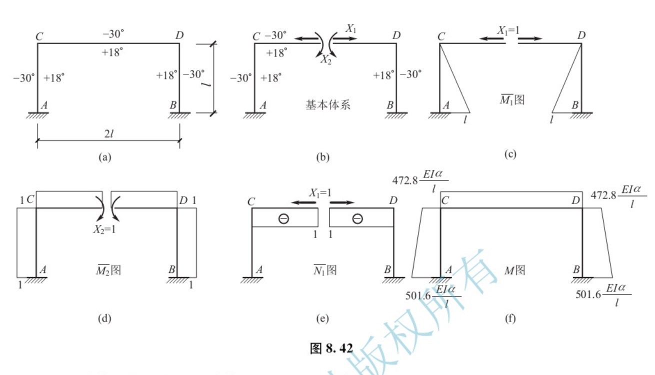


图 8.42

(3) 计算系数和自由项计算。

绘出$\overline{M}_1$、$\overline{M}_2$和$\overline{N}_1$图，分别如图 8.42(c)、(d)和(e)所示，$\overline{N}_2=0$。

轴线温度 $t_0=\dfrac{18+(-30)}{2}=-6$℃，温差 $\Delta t=18-(-30)=48$℃

其系数和自由项计算为：

$$\delta_{11}=\sum\int\frac{\overline{M}_1^2}{EI}\mathrm{d}x=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\times l\times l\times\frac{2}{3}l\right]\times 2=\frac{2l^3}{3EI}$$

$$\delta_{22}=\sum\int\frac{\overline{M}_2^2}{EI}\mathrm{d}x=\frac{1}{EI}[1\times l\times 1\times 2+1\times 2l\times 1]=\frac{4l}{EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\sum\int\frac{\overline{M}_1\overline{M}_2}{EI}\mathrm{d}x=-\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\times l\times l\times 1\right]\times 2=-\frac{l^2}{EI}$$

$$\Delta_{1t}=\sum(\pm)\alpha t_0A_{\overline{N}_1}+\sum(\pm)\alpha\frac{\Delta t}{h}A_{\overline{M}_1}$$

$$=\alpha\times 6\times 1\times 2l+\alpha\times\frac{48}{h}\left(\frac{1}{2}\times l\times l\times 2\right)=12\alpha l+\alpha\frac{48}{\frac{l}{10}}\times l^2=492\alpha l$$

$$\Delta_{2t}=\sum(\pm)\alpha t_0A_{\overline{N}_2}+\sum(\pm)\alpha\frac{\Delta t}{h}A_{\overline{M}_2}$$

$$=0-\alpha\times\frac{48}{h}(1\times l\times 2+1\times 2l)=-\frac{192\alpha l}{\frac{l}{10}}=-1920\alpha$$

(4) 解力法方程，求多余未知力。

代入数据后，方程为：

$$\frac{2l^3}{3EI}X_1-\frac{l^2}{EI}X_2+492\alpha l=0$$

$$\frac{-l^2}{EI}X_1+\frac{4l}{EI}X_2-1920\alpha=0$$

解得

$$X_1=-\frac{28.8EI\alpha}{l^2},\quad X_2=\frac{472.8EI\alpha}{l}$$

(5) 作 M 图。

按弯矩叠加公式 $M=\overline{M}_1X_1+\overline{M}_2X_2$ 计算各杆端弯矩值，最后的 M 图如图 8.42(f) 所示。

由上例计算可知，在温度变化的影响下，超静定结构的内力与各杆 EI 的绝对值有关。在给定温度条件下，截面尺寸越大，内力愈大。这是与荷载作用下的计算所不同的。

计算结果表明，当杆件截面内、外侧有温差时，弯矩图的竖标出现在降温面一侧，使升温面产生压应力，降温面产生拉应力。因此，在钢筋混凝土结构中要特别注意因降温可能出现的裂缝。

2. 支座移动时超静定结构的计算

非荷载因素的另一种情况是支座移动。超静定结构在支座移动时的内力计算与荷载作用或温度改变时的计算方法基本相同，主要区别在于力法方程中自由项的计算以及右端项与基本体系形式有关。下面举例说明。

图 8.43(a)所示刚架，设其支座 B 由于某种原因产生位移，向右移动距离 a，向下移动 b，且顺时针方向转动 φ 角。分析此结构时，如取基本体系(一)［图 8.43(b)］，根据基

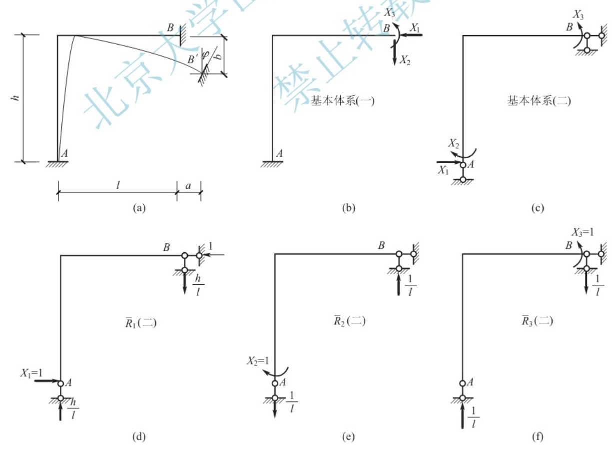


图 8.43

本结构在多余未知力 X_1、X_2、X_3 和支座移动共同作用下应与原结构具有相同位移的条件，建立力法方程：

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{13}X_3+\Delta_{1C}&=-a\\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{23}X_3+\Delta_{2C}&=b\\ \delta_{31}X_1+\delta_{32}X_2+\delta_{33}X_3+\Delta_{3C}&=-\varphi\end{aligned} \tag{a}$$

式中系数与外因无关，故其计算和以前一样。右端负号表示所设多余未知力方向与位移方向相反。自由项 Δ_{1C}、Δ_{2C}、Δ_{3C}分别代表基本结构由于支座移动在去掉多余约束处沿 X_1、X_2、X_3 方向的位移，它们可按求静定结构因支座移动引起的位移公式(7-16)计算，即

$$\Delta_{KC}=-\sum\overline{R}\cdot C \tag{b}$$

因支座 A 处无位移，则 $\Delta_{1C}=\Delta_{2C}=\Delta_{3C}=0$。

若取基本体系(二)［图 8.43(c)］，则力法方程为：

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{13}X_3+\Delta_{1C}&=0\\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{23}X_3+\Delta_{2C}&=0\\ \delta_{31}X_1+\delta_{32}X_2+\delta_{33}X_3+\Delta_{3C}&=-\varphi\end{aligned} \tag{c}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{1C}&=-\left[-1\times a+\frac{h}{l}\times b\right]=a-\frac{b}{l}h\\ \Delta_{2C}&=-\left[-\frac{1}{l}\times b\right]=\frac{b}{l}\\ \Delta_{3C}&=-\left[\frac{1}{l}\times b\right]=-\frac{b}{l}\end{aligned} \tag{d}$$

将系数和自由项代入力法方程，可解得多余未知力 X_1、X_2 和 X_3，并按叠加公式：

$$M=\overline{M}_1X_1+\overline{M}_2X_2+\overline{M}_3X_3 \tag{e}$$

计算最后弯矩。

通过以上分析，可以看出支座移动与荷载作用相比，有以下几个特点：

(1) 由式(a)和式(c)可以看出，取不同基本体系时，力法方程的形式有所不同，方程等号右边可以不为零；

(2) 由力法方程式(a)和式(c)可以看出，自由项是基本结构由支座移动产生的，可由静定结构支座移动的位移公式计算；

(3) 因没有荷载作用，所以内力全部由多余未知力引起，见式(e)。

【例 8-11】 图 8.44(a)所示一端固定，一端铰支单跨超静定梁，如果固定端 A 转动角度 φ，支座 B 下沉 c，试绘制其弯矩图。

解：(1) 选择基本体系。

去掉支座的转动约束，以简支梁作为基本结构，以支座 A 的反力偶为多余未知力 X_1，得到基本体系如图 8.44(b)所示。

(2) 建立力法方程。

根据基本结构在多余未知力 X_1 和支座移动共同作用下在 A 处的转角为 φ 的条件，建立力法方程：

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1C}=\varphi$$

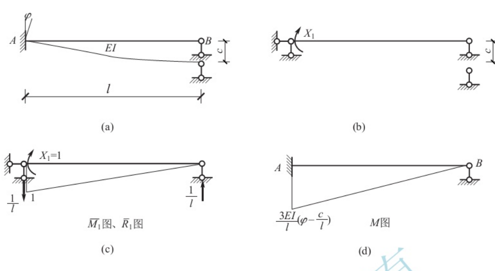


图 8.44

(3) 计算系数与自由项。

根据单位弯矩图$\overline{M}_1$与单位力引起的反力$\overline{R}_1$［图 8.44(c)］计算系数与自由项：

$$\delta_{11}=\int\frac{\overline{M}_1^2}{EI}\mathrm{d}x=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\times1\times l\times\frac{2}{3}\times1\right]=\frac{l}{3EI}$$

$$\Delta_{1C}=-\sum\overline{R}\cdot c=-\left(-\frac{1}{l}\times c\right)=\frac{c}{l}$$

(4) 解力法方程，求多余未知力。

$$\frac{l}{3EI}X_1+\frac{c}{l}=\varphi$$

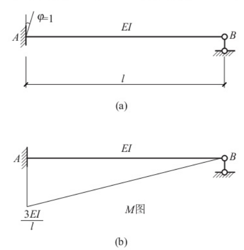
$$X_1=\frac{3EI}{l}\left(\varphi-\frac{c}{l}\right)$$

(5) 作 M 图。

按公式 $M=\overline{M}_1X_1$计算，最后 M 图如图 8.44(d)所示。

现在就本例讨论两种特殊情形。

(1) 当 $\varphi=1$，$c=0$ 时［图 8.45(a)]：



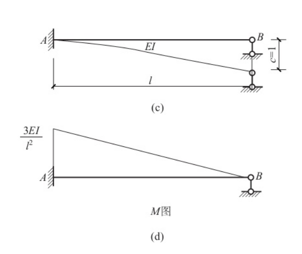


图 8.45

$$X_1=\frac{3EI}{l}=3i$$

式中，$i=\frac{EI}{l}$称为线刚度。

弯矩图如图 8.45(b)所示。

(2) 当 $\varphi=0$，$c=1$ 时［图 8.45(c)］：

$$X_1=-\frac{3EI}{l^2}=-\frac{3i}{l}$$

弯矩图如图 8.45(d)所示。

从以上计算结果可知，支座移动时超静定结构的内力也是与刚度的绝对值有关。这一点与温度改变时对超静定结构的影响相同，也是与荷载作用相比的又一个特点。

8.7 超静定结构的位移计算

为了校核超静定结构的刚度，就必须会计算超静定结构的位移。对于超静定结构位移计算，仍可采用第 7 章所述的单位荷载法和相关计算公式来进行计算。

以求图 8.46(a)所示超静定梁跨中 C 点的竖向位移 Δ_{CV} 为例，例 8-1 已用力法求出其 M 图［图 8.46(b)］，以此作为结构实际状态。为求跨中 C 点的竖向位移，可在跨中 C 点加单位虚荷载 $P=1$，构成虚拟状态，并作出其 $\overline{M}$ 图［图 8.46(c)］，然后将 $\overline{M}$ 图与 M 图相乘即可求得 Δ_{CV}。但是，为了作出 $\overline{M}$ 图，又需要解算一个三次超静定问题，显然这样做是比较麻烦的。

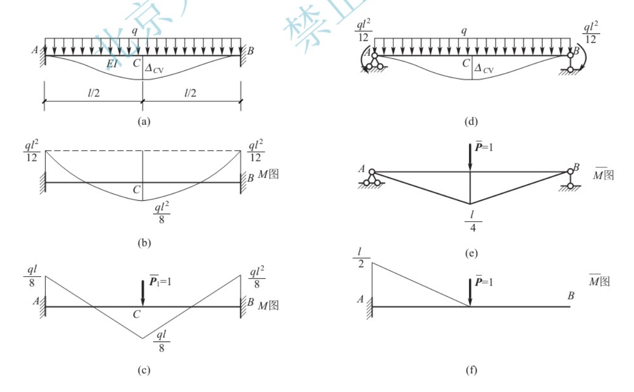


图 8.46

为了简化计算，位移计算也可同超静定梁内力计算一样，利用基本结构进行。因为基本结构在多余未知力和荷载共同作用下的内力和变形与原结构是完全一致的。即由力法求出原结构的多余未知力后，将所求出的多余未知力与原有荷载均视为主动力，共同作用于基本结构［图 8.46(d)］，此基本结构的位移即为原结构的位移。因此利用这一特点，求超静定结构的位移，完全可以用求基本结构的位移来代替。于是，虚拟状态的单位力就可以加在基本结构上，由于基本结构是静定的，故此时的内力图仅由平衡条件便可以求得。图 8.46(a)所示超静定梁跨中 C 点的竖向位移 Δ_{CV} 可由 M 图［图 8.46(b)］与 $\overline{M}$ 图［图 8.46(e)］图乘求得

$$\Delta_{CV}=\frac{1}{EI}\left[-\left(\frac{ql^2}{12}\right)\times\frac{l}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{l}{4}\right)+\frac{2}{3}\times\frac{ql^2}{8}\times\frac{l}{2}\times\left(\frac{5}{8}\times\frac{l}{4}\right)\right]\times 2=\frac{ql^4}{384EI}(\downarrow)$$

由于超静定结构的最后内力图并不因所取基本结构的不同而异，也就是说，其实际内力可以看作是选取任何一种基本结构求得的。因此，在求位移时，也可任选一种基本结构来求虚拟状态的内力，通常可选择虚拟内力图较简单的基本结构，以便进一步简化计算。如采用图 8.46(f)所示的基本结构并用其 $\overline{M}$ 图与 M 图图乘，可求得同样的结果，即

$$\Delta_{CV}=\frac{1}{EI}\left[\left(\frac{ql^2}{12}\times\frac{l}{2}\right)\times\frac{l}{4}-\frac{2}{3}\times\frac{ql^2}{8}\times\frac{l}{2}\times\left(\frac{3}{8}\times\frac{l}{2}\right)\right]=\frac{ql^4}{384EI}$$

由计算可知，两端固定的超静定梁，在均布荷载作用下的最大竖向位移，仅是简支梁的最大竖向位移的 1/5。

综上所述，计算超静定结构的位移的步骤是：

(1) 计算超静定结构，求出最后的内力，以此为实际状态；

(2) 任选一种基本结构，沿所求位移方向加单位力，并求出虚拟状态的内力；

(3) 按位移计算公式或图乘法计算所求位移。

【例 8－12】 求图 8.47(a)所示超静定刚架 D 点的水平位移 Δ_{DH}，EI=常数。用力法已求出 M 图［图 8.47(b)］。

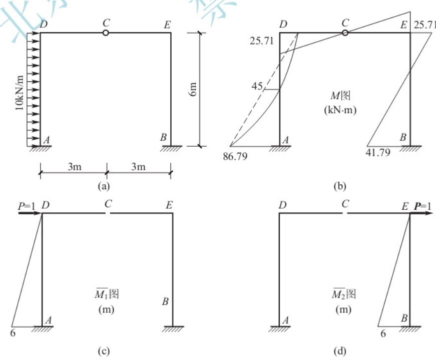


图 8.47

解： 取基本结构如图 8.47(c)所示，在其 D 点作用单位水平力 $P=1$ ，求得$\overline{M_1}$图。

由 M 图［图 8.47(b)］与 $\overline{M}$ 图［图 8.47(c)］图乘求得

$$\Delta_{DH}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\times 86.79\times 6\times\left(\frac{2}{3}\times 6\right)-\frac{1}{2}\times 25.71\times 6\times\left(\frac{1}{3}\times 6\right)-\frac{2}{3}\times 45\times 6\times 3\right]=\frac{347.22}{EI}(\rightarrow)$$

上述位移计算尚可简化。忽略轴向变形，则 $\Delta_{DH}=\Delta_{EH}$，故若在 E 点加水平单位力 $P=1$［图 8.47(d)］，则由 M 图［图 8.47(b)］与$\overline{M_2}$图［图 8.47(d)］图乘求得

$$\Delta_{EH}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\times 41.96\times 6\times\left(\frac{2}{3}\times 6\right)-\frac{1}{2}\times 25.71\times 6\times\left(\frac{1}{3}\times 6\right)\right]=\frac{347.22}{EI}(\rightarrow)$$

得同样结果，但计算更简单。

8.8 超静定结构计算的校核

在超静定结构的计算过程中，经过的计算步骤和数字运算较多，比较容易出现错误，而作为计算成果的最后内力图，是结构设计的依据，必须保证它的正确性。因此，在求得内力图后，应该进行校核。正确的内力图必须同时满足平衡条件和位移条件，因而校核也应从这两方面进行。

现举例说明校核方法。图 8.48(a)所示超静定刚架，内力图已作出，如图 8.48(b)、(c)、(d)所示。

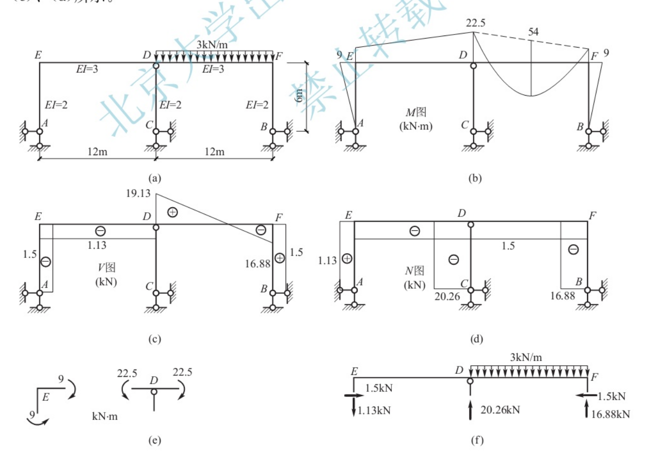


图 8.48

1. 平衡条件的校核

超静定结构的最后内力图应完全满足静力平衡条件，即取结构的整体或任何部分为隔离体，其受力均应满足平衡条件。常用的作法是截取结点或截取杆件，也可以截取结构的某一部分，检查它是否满足平衡条件。为了校核 M 图应取任一结点，看是否能满足力矩平衡条件 $\sum M=0$。为了校核 V、N 图，应截取某一杆件或任一结点，看是否能满足 $\sum X=0$，$\sum Y=0$。例如图 8.48(e)所示，取结点 E 与结点 D 为隔离体，有

$$\sum M_E=9-9=0$$

$$\sum M_D=22.5-22.5=0$$

可见满足平衡条件。

再如截取柱顶以上杆件部分 EDF [图 8.48(f)]，有

$$\sum X=1.5-1.5=0$$

$$\sum Y=16.88+20.26-3\times 12-1.13=0$$

可见也满足平衡条件。

2. 变形条件的校核

仅有平衡条件的校核，还不能保证超静定结构的最后内力图是一定正确的。这是由于最后内力图是根据力法方程求得多余未知力后，在基本结构上按平衡条件作出的。而多余未知力是否正确，则不能由平衡条件反映出来，还应校核变形条件。

变形条件校核的一般做法是：任意选取基本结构，任意选取一个多余未知力 X_i，然后根据最后的内力图算出沿 X_i 方向的位移 Δ_i，并检查 Δ_i 是否与原结构中的相应位移相等。由于在梁和刚架中主要考虑弯曲的影响，故一般校核最后弯矩图是否满足下式：

$$\Delta_i=\sum\int\frac{\overline{M}M}{EI}\mathrm{d}s=0(\text{或}\ \Delta) \tag{8-15}$$

式中，$\overline{M}$为基本结构在 $X_i=1$ 作用下的弯矩图；M 为原超静定结构的弯矩图。

例如，图 8.48(b)所示刚架的最后弯矩图 M，为了检查 D 点处竖向位移 Δ_{DV} 是否为零，可取图 8.49 所示基本结构，在 D 点沿竖向加单位力并作出$\overline{M}$图，将$\overline{M}$图与 M 图相乘，得

$$\Delta_{DV}=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\times 9\times 12\times 2\right)\times 2+\left(\frac{1}{2}\times 22.5\times 12\times 4\right)\times 2-\frac{2}{3}\times 54\times 12\times 3\right]=0$$

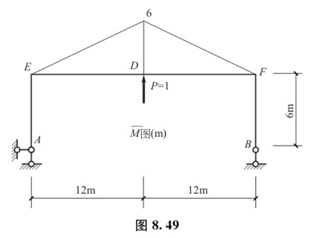


图 8.49

可见满足 D 点竖向位移为零这一位移条件。

此外，还需验算 B 点水平多余未知力方向的位移条件 [因为图 8.48(a)是两次超静定结构，一般需检查两个位移条件]。如 $\Delta_{BH}=0$ 也满足，则说明最后的 M 图是正确的。

从理论上讲，对于一个 n 次超静定结构，由于需要利用 n 个位移条件才能求出 n 个多余未知力，故做变形条件校核时，也应该进行 n 次。不过通常只需进行少数几次

校核即已足够。而且也不限于在原来计算时所用的基本体系上进行。

对于具有封闭无铰框格的刚架，可利用封闭框格上任一截面处的相对角位移等于零的条件来校核。例如，图 8.50(a)所示刚架为一封闭式刚架，其最后弯矩图如图 8.50(b) 所示。为了校核其相对角位移 Δ_i是否为零的位移条件，可取图 8.50(c)所示基本结构并用单位弯矩图$\overline{M}$图与 M 图相乘的结果进行校核。即

$$\sum\int\frac{\overline{M}M}{EI}\mathrm{d}x=\sum\int\frac{1\cdot M}{EI}\mathrm{d}x=\sum\frac{A_M}{EI}$$

式中，A_M 为刚架某杆件最后弯矩图面积。代入数值进行计算，并规定在封闭框外侧的弯矩取正值，则有

$$\sum\frac{A_M}{EI}=\frac{1}{2EI}\left[\frac{1}{2}\times12.09\times6-\frac{1}{2}\times5.05+\frac{1}{2}\times10.76\times6-\frac{1}{2}\times6.38\times6\right]+$$

$$\frac{1}{3EI}\left[\frac{12.09+10.76}{2}\times6-\frac{1}{2}\times40\times6\right]=\frac{17.13}{EI}-\frac{17.15}{EI}\approx0$$

可见最后弯矩图 8.50(b)是正确的。

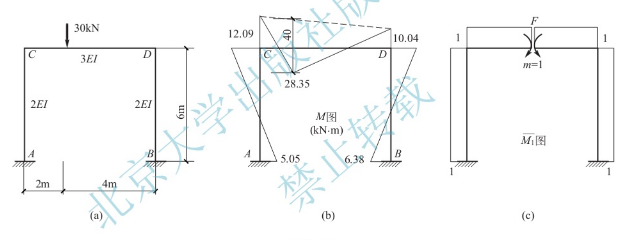


图 8.50

由上可知，对于具有封闭框格的刚架，校核其 M 图的正确性时，可按下述条件判别：任何封闭框格各杆的最后弯矩图的面积除以相应的刚度后的代数和应等于零。

本 章 小 结

本章首先介绍了力法的基本思想：以多余约束力为基本未知量，以去掉多余约束后得到的静定结构作为基本结构，利用基本体系在荷载和多余约束力共同作用下的变形条件建立力法方程，从而求解多余未知力。求得多余约束力后，超静定问题就转化为静定问题，可用平衡条件求解所有未知力。

用力法计算超静定结构的步骤(确定基本未知量，选择基本体系，建立力法方程，绘制内力图)是本章学习的重点。

对称性的利用可简化结构的计算。超静定结构的位移计算结果不仅可以直接用于刚度

的校核，还可以利用变形条件对内力计算结果进行校核。

通过力法的求解，可得出超静定结构具有以下特点：

(1) 在荷载作用下，超静定结构的内力与各杆的相对刚度有关；

(2) 超静定结构在温度改变、支座移动、制造误差等因素影响下，一般会产生内力和位移；

(3) 因为超静定结构有多余约束，因此有较多的安全储备。

关 键 术 语

超静定结构(statically indeterminate structure)；超静定次数(degree of indeterminacy)；多余未知力（redundant unknown force）；基本结构(basic structure)；基本体系(basic system)；力法(force method)；力法的基本方程(basic equation of force method)；连续梁(continuous beam)；排架(bent)；两铰拱(two - hinged arch)；对称（symmetry)；反对称(antisymmetry)。

习 题 8

一、思考题

1. 什么是超静定结构的超静定次数？如何确定超静定结构的超静定次数？

2. 力法解超静定结构的思路是什么？

3. 什么是力法的基本结构和基本体系？它们在计算中起什么作用？能否采用超静定结构作基本结构？

4. 力法典型方程的物理意义是什么？方程中每一系数和自由项的含义是什么？怎样求得？

5. 试从物理意义上说明，为什么力法方程中的主系数必为大于零的正值，而副系数可为正值或负值或为零。

6. 典型方程的右端是否一定为零？在什么情况下不为零？

7. 为什么静定结构的内力状态与 EI 无关，而超静定结构的内力状态与 EI 有关？

8. 为什么在荷载作用下超静定刚架的内力状态只与各杆 EI 的相对值有关，而与其绝对值(真值)无关？

9. 试比较在荷载作用下用力法计算刚架、桁架、排架、组合结构和拱的异同。

10. 何谓对称结构？为什么利用对称性可以使计算得到简化？

11. 利用对称性简化结构计算有哪几种做法？

12. 结构上没有荷载就没有内力，这个结论在什么情况下适用？在什么情况下不适用？

13. 用力法计算超静定结构时，考虑温度变化、支座移动等因素的影响与考虑荷载作用的影响，所建立的力法方程有何异同？

14. 计算超静定结构的位移时，为什么可以取不同的基本结构来绘出 $\overline{M}$ 图？

15. 计算超静定结构时，在什么情况下只需给出 EI 的相对值，在什么情况下需给出 EI 的绝对值？

二、填空题

1. 图 8.51 所示各结构的超静定次数分别是：(a)图为________；(b)图为________；(c)图为________；(d)图为________；(e)图为________；(f)图为________；(g)图为________；(h)图为________；(i)图为________；(j)图为________。

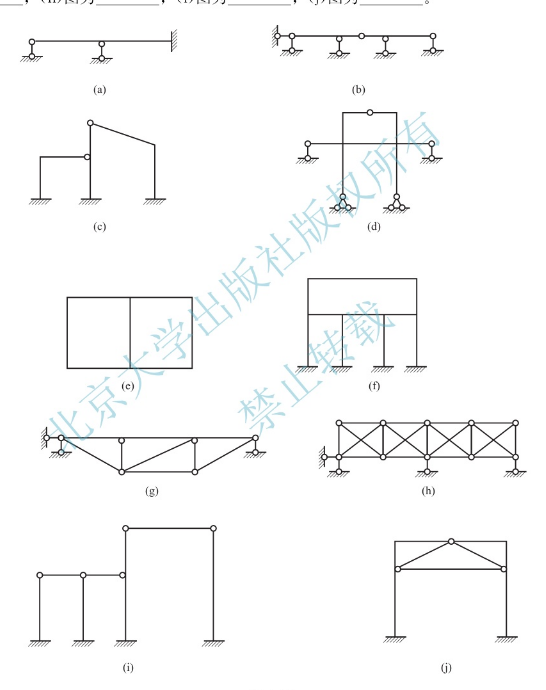


图 8.51

2. 力法方程中柔度系数 δ_{ij} 代表________________________________，自由项 Δ_{iP} 代表____________________________。

3. 力法方程中的主系数的符号必为________，副系数和自由项的符号可能为________。

4. 图 8.52 所示对称结构的杆端弯矩 M_{BA} = ________，________侧受拉。

5. 图 8.53 所示对称结构在水平荷载作用下，M_{BC} = ________，________侧受拉。

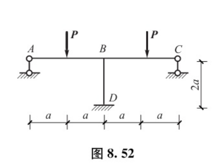


图 8.52

图 8.53

三、判断题

1. 力法的基本方程是平衡方程。(　　)
2. 用力法解仅在荷载作用下的结构，其力法方程右端项不一定等于零。(　　)
3. 在温度变化与支座移动因素作用下，静定与超静定结构都有内力。(　　)
4. 在荷载作用下，超静定结构的内力与 EI 的绝对值大小有关。(　　)
5. n 次超静定结构，任意去掉 n 个多余约束均可作为力法基本结构。(　　)
6. 图 8.54 所示梁的超静定次数是 $n=4$。(　　)
7. 图 8.55 所示结构的超静定次数是 $n=3$。(　　)

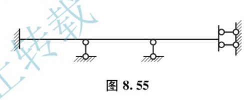


图 8.54

图 8.55

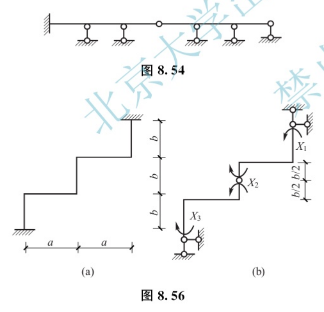


图 8.56

8. 图 8.56(b)所示结构可作图 8.56(a)所示结构的基本体系。(　　)

9. 在力法计算中，校核最后内力图时只要满足平衡条件即可。(　　)

10. 图 8.57 所示结构用力法求解，可取切断杆件 2、4 后的体系作为基本结构。(　　)

11. 图 8.58 所示结构的超静定次数为 4。(　　)

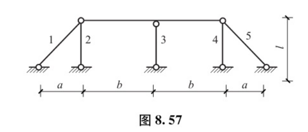


图 8.57

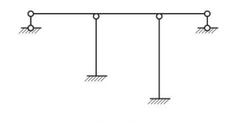


图 8.58

12．图 8.59 所示桁架各杆 EA 相同，在所示荷载作用下，求得 BD 杆内力为零。（ ）

13．图 8.60(a)所示对称刚架，在对称荷载作用下可取图 8.60(b)所示半刚架来计算。（ ）

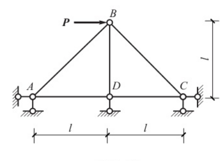
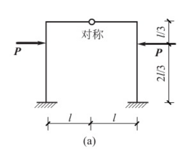


图 8.59



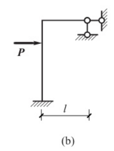


图 8.60

14．图 8.61(a)所示梁的 M 图如图 8.61(b)所示。（ ）

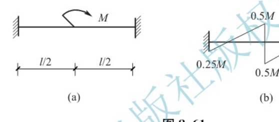


图 8.61

15．图 8.62(a)所示结构的 M 图形状如图 8.62(b)所示。（ ）

16．图 8.63 所示桁架当下弦杆温度上升时，中段下弦杆受拉。（ ）

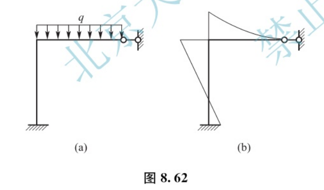


图 8.62

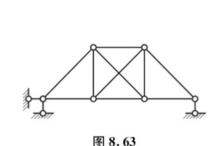


图 8.63

17．设有静定与超静定两个杆件结构，二者除了支承情况不同外，其余情况完全相同，则在同样的荷载作用下超静定杆件的变形比静定的大。（ ）

18．如果要降低超静定结构中某些杆的弯矩，可把该杆的惯性矩增大。（ ）

四、选择题

1．力法方程是沿基本未知量方向的（ ）。

A．力的平衡方程　　B．位移为零方程

C．位移协调方程　　D．力的平衡及位移为零方程

2．超静定结构在荷载作用下的内力和位移计算中，各杆的刚度应为（ ）。

A．均用相对值

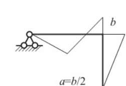
B．均必须用绝对值

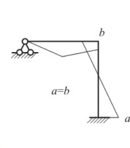
C. 内力计算用绝对值，位移计算用相对值

D. 内力计算可用相对值，位移计算须用绝对值

3. 图 8.64(a)结构最后弯矩图的形状为(　　)。

A. 图(b)　　B. 图(c)　　C. 图(d)　　D. 都不对

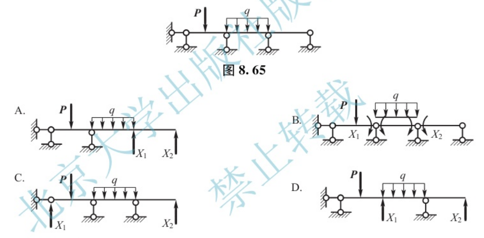




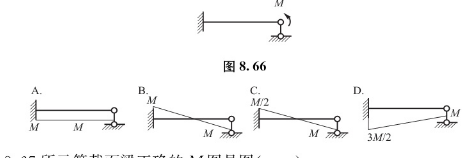
(a)　(b)　(c)　(d)

图 8.64

4. 图 8.65 所示梁用力法计算时，较简单的基本体系为图(　　)。



5. 图 8.66 所示等截面梁正确的 M 图是图(　　)。



6. 图 8.67 所示等截面梁正确的 M 图是图(　　)。

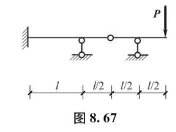
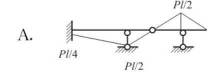
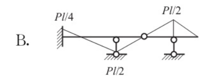
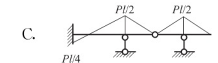
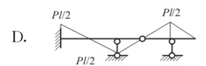


图 8.67









7. 图 8.68 所示结构正确的 M 图(EI 为常数)为图(　　)。

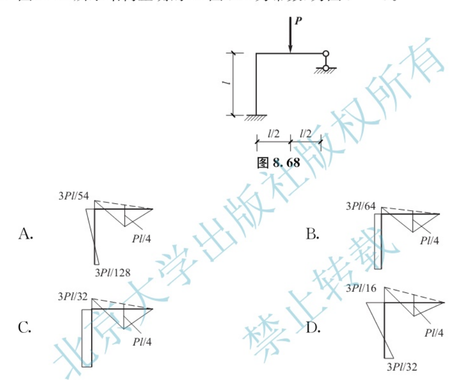


图 8.68

8. 图 8.69 所示对称结构，其半边结构计算简图为图(　　)。

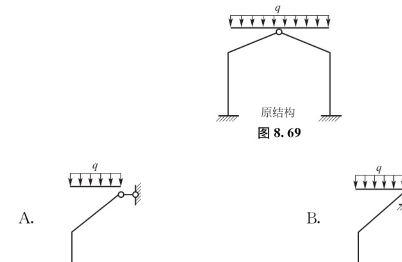


图 8.69



9. 图 8.70 所示连续梁的正确 M 图为图(　　)。

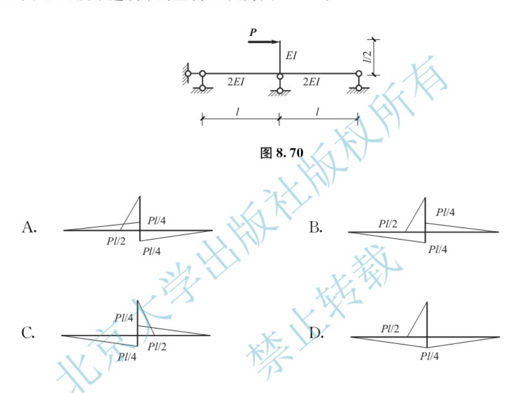


图 8.70

10. 图 8.71 所示结构各杆 EI、EA 值均相同，上横梁弯矩最大者为图(　　)。

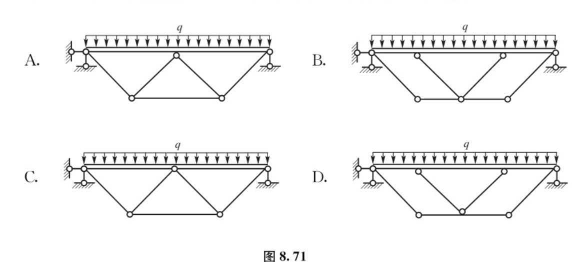


图 8.71

五、计算题

1. 用力法计算图 8.72 所示超静定梁，并作 M、V 图。

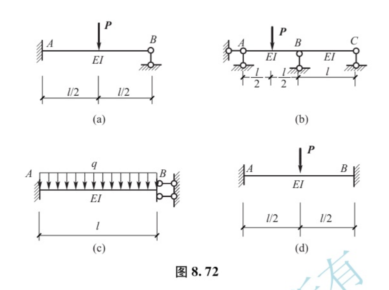


图 8.72

2. 用力法计算图 8.73 所示刚架，并作 M、V、N 图。

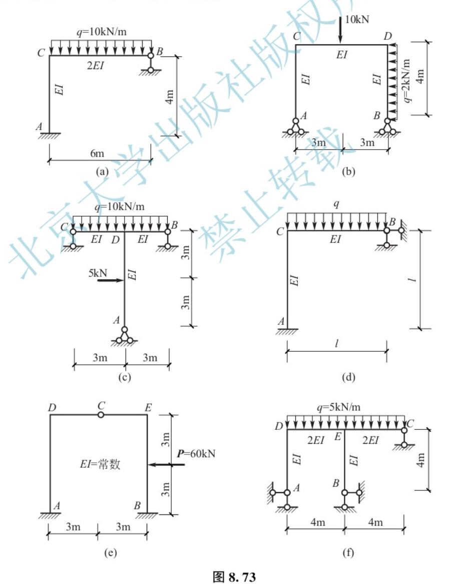
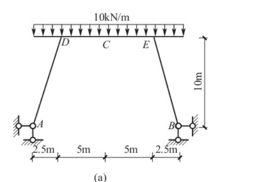
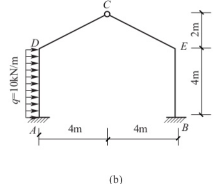


图 8.73

3. 用力法计算图 8.74 所示刚架，作 M 图。EI=常数。



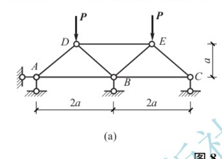
(a)



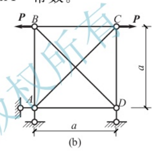
(b)

图 8.74

4. 用力法计算图 8.75 所示超静定桁架。各杆 EA=常数。



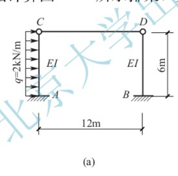
(a)



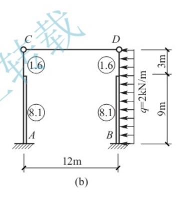
(b)

图 8.75

5. 用力法计算图 8.76 所示排架，并作 M 图。



(a)



(b)

图 8.76

6. 试用力法计算图 8.77 所示组合结构中各链杆的轴力，并作出横梁的 M 图。已知横梁 $EI=10^4\text{kN}\cdot\text{m}$，链杆的 $E_1A_1=15\times10^4\text{kN}$。

7. 试计算图 8.78 所示抛物线两铰拱中的拉杆及截面 K 的内力。$y=\frac{4f}{l^2}x(l-x)$，$EI=5\times10^3\text{kN}\cdot\text{m}^2$，$EA=3.6\times10^6\text{kN}$，$E_1A_1=2\times10^5\text{kN}$。

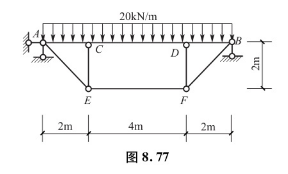


图 8.77

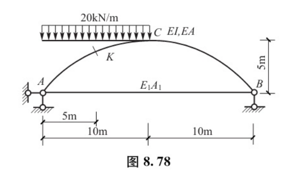


图 8.78

8. 求图 8.79 所示等截面半圆无铰拱在拱顶受集中荷载 P 时的内力。EI=常数。

9. 利用对称性，计算图 8.80 所示刚架的 M 图。

10. 结构的温度改变如图 8.81 所示，EI=常数，截面对称于形心轴，其高度 $h=l/10$，材料的线膨胀系数为 α。试：(a)作 M 图；(b)求杆端 A 的角位移。

11. 图 8.82 所示单跨梁，温度改变如下：梁上边缘温度升高 t_1，下上边缘温度升高 t_2，$t_2>t_1$，作 M 图。EI=常数。线膨胀系数为 α，梁截面高度为 h。

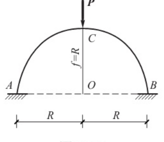


图 8.79

图 8.80

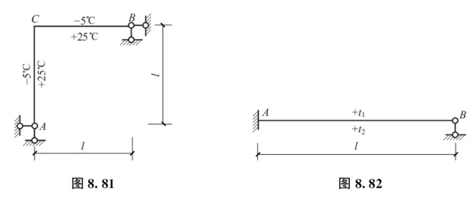


图 8.81　　图 8.82

12. 作图 8.83 所示各结构在已知支座位移下的 M 图。

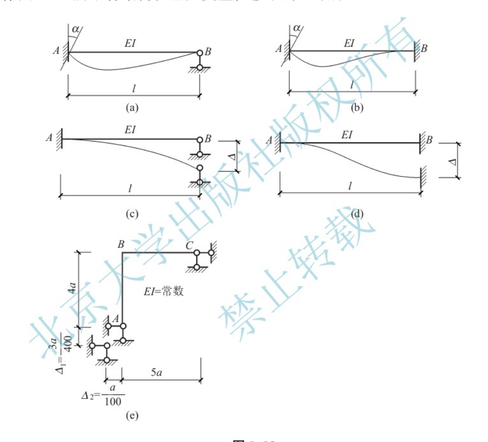


图 8.83